

DIE ZIRKULATION DER ATMOSPHÄRE IN DEN GEMÄSSIGTEN BREITEN DER ERDE.

GRUNDZÜGE EINER THEORIE DER KLIMASCHWANKUNGEN.

VON A. DEFANT, INNSBRUCK.

1. Die Zirkulation der Atmosphäre aussertropischer Breiten aufgefasst als Turbulenzerscheinung.

Die Klimatologie, als die Lehre von dem durchschnittlichen Verlaufe der Witterungserscheinungen an den verschiedenen Punkten der Erdoberfläche, bedient sich zur Darstellung der *mittleren* Zustände der Atmosphäre in den allermeisten Fällen der arithmetischen Mittelwerte der einzelnen meteorologischen Elemente für längere oder kürzere Zeiträume. Dieser Tatsache liegt die Erkenntnis zu grunde, dass die auftretenden Abweichungen von diesen Mittelwerten von mehr oder minder rasch vorübergehenden Störungen des normalen Witterungsverlaufes bedingt sind, die eben durch die Mittelbildung über einen grösseren Zeitraum eliminiert werden und wodurch erst die Grundlage für den Vergleich der einzelnen Beobachtungsreihen untereinander erhalten wird. Aber nicht nur in der Klimatologie sondern auch in einzelnen Problemen der Meteorologie ist man gezwungen, namentlich wenn man Erscheinungen, welche die ganze Erde umfassen, überblicken will, sich der Darstellung der Verhältnisse durch Mittelwerte zu bedienen, um jene kleinen Abweichungen auszuschalten, die im grossen ganzen zurücktreten, wenn man die Erde als Ganzes betrachtet.

Eine der Erscheinungen, in welcher in dieser Hinsicht im weitgehendsten Sinne von der erwähnten Darstellung Gebrauch gemacht wird und gemacht werden muss, ist die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre. So relativ einfach die Strömungsverhältnisse der Luft in der Tropenzone und wohl auch noch in den angrenzenden Teilen der Subtropenzone sind, so verworren sind dieselben in der gemässigten und polaren Zone der Erde, wenn nicht mittlere Zustände betrachtet werden, sondern ein einzelner Augenblick herausgegriffen und zur Darstellung gebracht wird. Nach letzteren würde es kaum glaubhaft erscheinen, dass in höheren Breiten der Erde die Strömungen der Luft eine „geordnete“ Grundlage besitzen und in dem Chaos der aufeinanderfolgenden Strömungsbilder

durch Mittelbildung über einen längeren Zeitraum alle jene störenden Erscheinungen ausgeschaltet werden, die, allerdings nur scheinbar, nicht zur geregelten Zirkulation der Atmosphäre gehören.

Ganz anders geartet sind hingegen die Strömungen der Tropen und Subtropen. Nur höchst selten beeinflusst durch rasch vorübergehenden Störungen wehen tagaus tagein dieselben Strömungen der Luft. Die an *einem* Tage ausgeführten Messungen würden bereits genügen ein charakteristisches Bild der Zirkulation der Atmosphäre dieser Gegenden, die durch die Eintönigkeit des Verlaufes auch der anderen atmosphärischen Vorgänge ausgezeichnet sind, zu geben; die Beobachtungswerte jedes weiteren Tages wären nicht imstande jenes erste Bild in seinen Grundzügen zu ändern. Hingegen lassen die Beobachtungen an einem Tage in den höheren Breiten der Erde von jenem mittleren Zustand, der jahraus jahrein in der Atmosphäre als Ganzes bestehen muss, nichts erkennen. Fortwährender zeitlicher und örtlicher Wechsel, scheinbar ohne Regel und Gesetz, ist das charakteristische der Strömungsverhältnisse der gemässigten und höheren Breiten der Erde.

So zerfällt an und für sich die grosse, durch den Temperaturgegensatz zwischen Äquator und Pol bedingte Zirkulation der Atmosphäre in zwei grosse Zirkulationssysteme: die hauptsächlich meridional verlaufende Zirkulation der Tropen- und Subtropenzone und die hauptsächlich längs der Parallelkreise von Westen nach Osten erfolgende Zirkulation der höheren Breiten. Durch diese Teilung will nicht gesagt sein, dass beide Zirkulationssysteme von einander unabhängig verlaufen und dass an ihren Grenzen keine Verbindung zwischen beiden besteht. Wir wissen im Gegenteil, dass die Zirkulation der Tropen- und Subtropenzone in innigem Zusammenhange mit den zonalen Bewegungen der höheren Breiten stehen, die, wenn sie auch eine grössere Trägheit besitzen als die meridionalen Konvektionsbewegungen der niederen Breiten, doch ohne Energiezufuhr aus diesen nicht bestehen könnten. Allerdings scheinen die mittleren zonalen Bewegungen längs der Parallelkreise vom stationären Gleichgewichtszustande nicht allzuweit entfernt zu sein, der aber nur auf einem Gleichgewichtszustand zwischen Energiezufuhr und Reibung im weitesten Sinne des Wortes bestehen kann. Ändern sich letztere Faktoren, so werden auch Änderungen in den meridionalen Bewegungen der Tropenzone und in den zonalen der höheren Breiten eintreten.

Ein besonderes Interesse für die folgenden Ausführungen beanspruchen die Strömungen der gemässigten und polaren Zone der Erde. Zur Erhaltung der Kontinuität ist bei diesen, wie F. M. Exner¹ hervorhebt, nicht nötig, dass durch einen senkrecht zum Parallelkreis geführten Querschnitt der Atmosphäre gleich viel Luft gegen Westen wie gegen Osten ströme; es kann in der Höhe der Wind nach einer Richtung wehen. Tatsächlich zeigen in beiden Hemisphären die

¹ Dynamische Meteorologie, S. 173.

neueren Wolkenbeobachtungen,¹ dass in den aussertropischen Breiten die Richtungen der unteren und oberen Strömungen der Luft in keinem Gegensatze zu einander stehen, wie dies in den Tropen der Fall ist. Die ganze Atmosphäre ist in einem Bewegungszustande rund um die Erde von Westen nach Osten begriffen. Nur insoweit scheint ein kleiner Unterschied in der Bewegungsrichtung der verschiedenen Luftschichten vorhanden zu sein, dass die untersten, der Erdoberfläche nächsten Schichten eine im allgemeinen gegen den Pol gerichtete Komponente, die höchsten Schichten hingegen eine kleine Komponente gegen den Äquator aufweisen, während die mittleren Luftschichten grösstenteils in mehr oder minder reiner West-Ostrichtung die Erde umkreisen. Im Gebiete des Polarbeckens besteht nach zahlreichen Beobachtungen wenigstens in den unteren Luftschichten eine ost-westliche Strömung mit einer äquatorwärts gerichteten Komponente, durch welche Luft aus den höchsten Breiten gegen den Äquator geführt wird.

Aus diesem Bilde der mittleren Luftströmungen der höheren Breiten schliesst man, dass in jeder Halbkugel die Luftzirkulation zwischen den Hochdruckgürtel der Subtropenzone und dem Pole in Form eines grossen Wirbels oder einer grossen Zyklone erfolgt; der Pol ist hierbei das Zentrum des Wirbels. Die Luftmassen der untersten Schichten nähern sich dem Zentrum des Wirbels, die mittleren umkreisen denselben in regelmässiger Weise von Westen nach Osten, die höheren und höchsten entfernen sich hingegen vom Zentrum und fliessen mit einer kleinen Komponente äquatorwärts.

Bereits früher wurde darauf hingewiesen, dass diese Zirkulation nur eine durch Mittelbildung über einen grösseren Zeitraum gewonnene Abstraktion aus den höchst unbeständigen Strömungsverhältnissen der gemässigten und polaren Zone der Erde darstellt und dass sich in Wirklichkeit der Kreislauf der Atmosphäre in diesen Teilen der Erde nicht stetig und ohne Störungen abspielt, wie in den Tropen. Es würde den Tatsachen in keiner Weise entsprechen, wollten wir in der dargelegten Zirkulation der höheren Breiten die Art und Weise sehen, wie der Kreislauf der Atmosphäre in diesen Breiten erfolgt, wie die Luftmassen tatsächlich den Polargegenden zugeführt und von diesen wieder in niedere Breiten zurückfliessen. Wir können dies nicht besser als mit den Worten von Hann² aussprechen, der sagt: „Der aussertropische Kreislauf erfolgt nicht direkt, sondern vollzieht sich hauptsächlich vermittels der Störungen, die einen integrierenden Bestandteil desselben bilden. Die Luft von niederen Breiten gelangt nur allmählich, auf Umwegen gleichsam, in höhere Breiten. Luftmischungen (oberer und unterer Schichten) spielen hier eine grosse Rolle und stören die grossen Rotationsgeschwindigkeiten“, die sonst auftreten müssten.

¹ Hann, Lehrbuch der Meteorologie, III. Aufl., S. 480.

² Lehrbuch, III. Aufl., S. 499.

Von diesen Tatsachen ausgehend kann die *Idée, die Luftströmungen der gemässigten Breiten der Erde als eine ausgesprochene Turbulenzerscheinung grossen Stils aufzufassen*, nicht als allzukühn angesehen werden. Gerade so wie in einem grossen, breiten Flusse die Bewegungen des fliessenden Wassers nicht fliessend ist, sondern rollend, wirbelnd und pulsierend, nicht laminar sondern turbulent ist, gerade so, wie in einem Strome die aus Messungen, die sich über ein grösseres Zeitintervall ausdehnen, abgeleitete Geschwindigkeitsverteilung in den einzelnen Querschnitten des Flusses in der geordneten Form, in der sie sich im Mittel aus den Messungen ergibt, tatsächlich nicht besteht, sondern nur eine Abstraktion aus der ungeordneten Strömung des Wassers ist, gerade so verhält es sich bei den Luftströmungen der aussertropischen Breiten. Zahllose Wirbel, die in den Zyklonen und Antizyklonen, in den sekundären Depressionen und in den anderen Isobarenformen vorkommenden Luftströmungen, die in scheinbar regelloser Weise aufeinander folgen, stören die allgemeine West-Ostbewegung; aber alle Störungen fallen fort, heben sich gegenseitig auf, wenn wir nur unsere Messungen über einen genügend langen Zeitraum ausdehnen. Es besteht, glaube ich, kein Vergleichspunkt, der in der Analogie zwischen der Wasserbewegung in einem Flusse und der Zirkulation der Atmosphäre in den gemässigten Breiten der Erde in bezug auf die Turbulenzerscheinungen nicht übereinstimmen würde. Nur die Dimensionen aller Erscheinungen müssen wir im zweiten Falle natürlich wesentlich grösser nehmen, als im ersten. Physikalisch ausgedrückt: die Turbulenzelemente und die Zeit des Ausgleiches sind im Falle des aussertropischen Kreislaufes bedeutend grösser als bei allen bisher betrachteten turbulenten Bewegungen.

Diese grosse Turbulenz der aussertropischen Zirkulationsströmung der Atmosphäre hat natürlich nichts zu tun mit der im Verhältnis dazu kleinen Turbulenz der gewöhnlichen Luftströmungen, auf die M. P. Rudski und A. Wegener hingewiesen haben¹ und die in letzter Zeit vielfach der Gegenstand interessanter Untersuchungen gewesen ist. Ich erinnere hierbei besonders an die Arbeiten E. Barkows,² der diese kleine, aber für die Dynamik der Luftströmungen überaus wichtige Turbulenz, die vielleicht mit dem Ausdruck „Unruhe des Windes“ am besten charakterisiert wird, durch spezielle Methoden messend verfolgen konnte. Aber gerade wie beim Wind Windrichtung und -geschwindigkeit fortwährenden starken Schwankungen unterliegen, kleine Wirbel die stossweise, pulsatorische Natur der Luftbewegung im Winde uns deutlich fühlen lassen, wir aber diese kleinen Wirbel als unbedeutende Störungen der allgemeinen Luftbewegung auffassen und bis in neuerer Zeit bei unseren Untersuchungen auch grösstertheils

¹ Siehe hierüber z. B. F. M. Exner, *Dynamische Meteorologie*, S. 114.

² E. Barkow, *Untersuchungen über die Struktur des Windes*, *Berichte über die Tätigkeit des Kgl. preuss. meteor. Inst.* 1912. Anhang; *Über die thermische Struktur des Windes*. *Meteor. Zeitsch.* 1915, S. 97.

ignoriert haben, gerade so können wir die Zyklonen und Antizyklonen der gemässigten Breiten als verhältnismässig kleine Störungserscheinungen des allgemeinen grossen Kreislaufes der Atmosphäre der aussertropischen Breiten auffassen, deren Ignorierung vermutlich nur deshalb nicht eintrat, weil sie zu kräftig in den Witterungsverlauf unserer Breiten eingreifen und weil in den Dimensionen, die der Mensch als praktisch eingeführt hat, die Grösse der Störungsgebiete und die Zeit ihres Ausgleiches sehr gross sind.

Dass wir die einzelnen Störungen messend verfolgen können, dass wir jeden Wirbel der aussertropischen Breiten bis ins kleinste analysieren, den Gesetzen seiner Entstehung und Umwandlung nachforschen und seinen Zusammenhang mit der allgemeinen West-Ostströmung untersuchen können, spricht nicht gegen die Auffassung des aussertropischen Kreislaufes als Turbulenzerscheinung. Denn dies ist einzig und allein nur eine Folge der Grösse und Ausdehnung der Störungsgebiete, d. h. der Zyklonen und Antizyklonen und der Grösse der Ausgleichszeit, Umstände, die es ermöglichen mit unseren gewöhnlichen Apparaten die Bewegung der Luftmassen messend verfolgen zu können und ihren Gesetzen nachzuspüren. Aber auch hier sind verglichen mit der allgemeinen Strömung diese Störungsgebiete relativ klein und tragen in bezug auf diese im allgemeinen, gerade so wie bei den kleinen Turbulenzwirbeln in Strömungen fließenden Wassers den Charakter des zufälligen in sich. Auch die kleinen Wirbel im fließenden Wasser erfolgen gewiss nach bestimmten hydrodynamischen Gesetzen und mit besonders feinen, empfindlichen Apparaten würde es auch hier möglich sein, die Ursachen der Entstehung und Fortpflanzung der einzelnen kleinen Turbulenzwirbel aufzudecken und zu verfolgen. Dass es tatsächlich bisher nicht geschehen ist, ist wohl nur eine Folge des Fehlens eines entsprechenden Instrumentariums und wohl auch des geringen Interesses, das man der Lebensgeschichte eines einzelnen kleinen Turbulenzwirbels entgegenbringt. Andererseits zeigen die Arbeiten Barkows,¹ dass es möglich ist, in die Gesetze und Regeln der Turbulenz ungeordneter Bewegung der Luft, der Unruhe des Windes einzudringen und, wenn auch nicht einzelne Luftwirbel messend zu verfolgen, doch viele gemeinsame Eigenschaften derselben aufzudecken. Die Verfolgung des Lebenslaufes eines Turbulenzelementes des grossen aussertropischen Kreislaufes ist hingegen dank der Entwicklung, die die synoptische Meteorologie genommen hat, keine besonders schwierige Arbeit.

Es ist meiner Ansicht nicht zu gewagt, alle diese Turbulenzbewegungen als geometrisch ähnliche Bewegungen im Sinne Helmholtz² aufzufassen. Eine ganze aufsteigende Reihe von solchen Arten ungeordneter Bewegungen sind uns bisher schon bekannt. Die ausserordentlich kleinen, unsichtbaren ungeordneten Bewe-

¹ L. c.

² Siehe hierüber: F. M. Exner, Dynamische Meteorologie, S. 82.

gungen der Moleküle eines Gases bilden wohl die kleinste Art der Turbulenzbewegung, die wir uns vorstellen können. Dann folgt die grosse Reihe der Turbulenzerscheinungen fließenden Wassers, von der einfachen Strömung des Wassers in Leitungsrohre bis zu den turbulenten Strömungen in grossen Flüssen und Strömen. Noch grösser dürfte im Durchschnitte die ungeordnete Bewegung strömender Luft, die Turbulenz des Windes sein. Die hier besprochene Turbulenz der atmosphärischen Zirkulation der aussertropischen Breiten wäre sodann die grösste der ungeordneten Bewegungen, die wir bisher kennen.

Die Turbulenzelemente sind bei dieser grossen Turbulenzerscheinung alle jene isobarischen Störungsformen, die sich in den synoptischen Wetterkarten, die wir täglich auf Grund der Terminbeobachtungen der meteorologischen Stationen entwerfen, vorfinden; unter diesen spielen die Zyklonen und Antizyklonen die Hauptrolle und ihre *mittlere* Ausdehnung gibt uns wohl ein Bild von der Grössenordnung der Turbulenzelemente. Der Durchmesser der Zyklonen der gemässigten Breiten (d. i. des Gebietes innerhalb der Isobare von 760 mm) beträgt im Mittel nach Loomis in Nordamerika 2,500 km, über dem atlantischen Ozean 3,200 km¹. In Europa, Asien und im Pazifischen Ozean dürfte im allgemeinen Mittel der Durchmesser der Zyklonen nicht wesentlich anders ausfallen. Hierbei ist allerdings nur an die *gut ausgebildeten* Zyklonen gedacht, die meistens eine sehr grosse Ausdehnung besitzen. Zur Bestimmung der Grössenordnung der Turbulenzelemente dürfen aber die kleineren Zyklonen und Teildepressionen, die viel häufiger sind als die grossen Depressionen, nicht ausser acht gelassen werden; denn sie spielen bei der Turbulenz vielleicht die grössere Rolle als die grossen Tiefdruckgebiete. Wir dürften deshalb nicht weit fehlgehen, wenn wir den Radius der Turbulenzelemente der aussertropischen Zirkulation im allgemeinen Durchschnitt eine Grössenordnung von etwa 10⁶ m zuschreiben. Natürlich ist die Streuung auf beiden Seiten dieses Durchschnittswertes eine gewiss sehr grosse; denn neben den kleinsten Teildepressionen kommen die ausgedehntesten Tiefdruckgebiete vor, die fast ganz Europa umfassen können. Deshalb charakterisiert obige Zahl nur die Grössenordnung der Turbulenzelemente der besprochenen ungeordneten Bewegung und diese wohl in guter Weise.

Die Ausgleichszeit der ungeordneten Bewegung, d. h. das Zeitintervall, von dem Mittelwerte der stündlichen, bzw. der Terminbeobachtungen gebildet werden müssen, um die Störungen auszugleichen und die Grundströmung rein zu erhalten, ist bei der grossen Turbulenzströmung, die wir eben betrachten, dementsprechend gross. Versuche haben ergeben, dass *wenigstens* Mittelwerte von 15 Tagen notwendig sind, um die Störungen grösstenteils auszugleichen, doch dürfte die Zahl, die natürlich auch grossen Schwankungen unterliegt, im Durchschnitte zu klein sein. 20 Tage bis ein Monat sind in den allermeisten Fällen notwendig,

¹ Siehe Hann, Lehrbuch, III. Aufl., S. 511.

um auch die länger dauernden Störungen, die allerdings weniger ins Gewicht fallen als die kleineren, auszuschalten. Der Grössenordnung nach müssen wir also die Ausgleichszeit wohl zu einem Monat, d. s. zu rund $4 \cdot 10^4$ Minuten ansetzen.

Beide Zahlen, die Grösse der Turbulenzelemente und die Länge der Ausgleichszeit charakterisieren die Turbulenzbewegung zunächst in genügender Weise. Die Mächtigkeit der betrachteten Turbulenzerscheinung erhellt deutlich aus der Grösse der Zahlen, die wir erhalten haben; doch müssen wir bedenken, dass die Breite des Turbulenzstromes ebenfalls eine grosse ist; denn er umfasst mindestens die Erdoberfläche zwischen dem 30. und 80. Breitenkreis, das sind 50 Grade oder rund $6 \cdot 10^6$ m. Die Kleinheit der Turbulenz des Windes dieser grossen Turbulenzströmung gegenüber zeigt sich deutlich, wenn wir Barkows mittlere Werte der Turbulenzelemente der Unruhe des Windes anführen. Er fand als Radius des mittleren Turbulenzwirbels etwa 40 m, die Ausgleichszeit zwischen 3 und 10 Minuten.

Aus obigen Erörterungen ergibt sich, dass man ohne Zweifel berechtigt ist, die aussertropische Zirkulation der Atmosphäre als eine turbulente Strömung grossen Stils rund um die Erde von Westen nach Osten aufzufassen. Noch ein anderer Umstand gibt aber dieser Auffassung eine gute Stütze.

Es ist bekannt, dass die Reibungswiderstände in der ungeordneten, turbulenten Bewegung einer Flüssigkeit wesentlich grösser sind als bei der entsprechenden laminaren Strömung. Durch die Bildung von Wirbeln, durch die Vermischung relativ kleiner Luftmassen werden grosse Energiemengen aufgezehrt, die der lebendigen Kraft, die in der Geschwindigkeit der Luftmassen steckt, entnommen wird. Die Folge ist eine Hemmung der Strömung, eine Herabsetzung der mittleren Geschwindigkeit der turbulenten Bewegung. Die im Verhältnis zum Gefälle geringe Geschwindigkeit des fliessenden Wassers in einem Strome ist bekanntlich darauf zurückzuführen; wir wissen jetzt auch, dass es die Wirkungen der Turbulenz des Windes sind, dass der Koeffizient der virtuellen Reibung der Luft um vieles grösser gefunden würde, als die physikalisch definierte Reibung der Luft.

Wir wissen aber auch, nachdem H. v. Helmholtz¹, es besonders hervorgehoben hat, „dass die hauptsächliche Hemmung der Zirkulation unserer Atmosphäre . . . in der Vermischung verschieden bewegter Luftschichten durch Wirbel gegeben ist“. Köppen² und Möller haben frühzeitig in der Mischung von Luftmassen, in der Form des Eindringens grösserer und kleinerer Massen aus einer Schichte in die andere einen hochbedeutsamen Faktor im Mechanismus der Atmosphäre

¹ H. v. Helmholtz: Über atmosphärische Bewegungen, Sitzber. der Kgl. preuss. Akademie der Wissenschaften 1888, oder Meteor. Zeitschr. 1888, S. 329.

² W. Köppen: Über potentielle Temperatur und Luftmischung. Meteor. Zeitschr. 1913 (Manuskript aus dem Jahre 1883).

erkannt. Diese Hemmung der Zirkulation der Atmosphäre ist aber in unserem Bilde nichts anderes als die grosse Turbulenzreibung, der die aussertropische Zirkulation der Atmosphäre als Turbulenzströmung unterliegt. Durch die Erhaltung des Rotationsmomentes der Luftmassen würden meridionale Konvektionsströmungen in den höheren Breiten rasch in westliche und östliche Winde umgeformt werden, die bei Erhaltung des Rotationsmomentes ganz ungeheure Geschwindigkeiten annehmen müssten. Verschiebungen einer anfänglich ruhenden Luftmasse um nur 10° Breite würden Geschwindigkeiten der Grössenordnung von 200 bis 300 m/sec. zur Folge haben.¹ Durch die Turbulenz der Zirkulation, d. i. durch die Mischungen der Luftmassen, in denen die verschiedenen Bewegungen unter einander ausgeglichen werden, werden aber die sonst auftretenden enormen West—Ostgeschwindigkeiten in dem polaren Zirkulationswirbel auf jene mittleren Werte herabgesetzt, die wir beobachten. Hierin erkennen wir die Bedeutung, welche der Turbulenzreibung des aussertropischen Kreislaufes zukommt. Dass der Reibungskoeffizient der betrachteten Turbulenzbewegung gewiss sehr gross ist und nicht verglichen werden kann mit der virtuellen Reibung der Luft, ergibt sich schon aus der Tatsache, dass durch ihn Geschwindigkeiten der Grössenordnung von 200 m/sec auf solche von etwa 20 m/sec. und weniger herabgesetzt werden.

Also auch in Hinsicht der auftretenden Reibungswiderstände ist die Auffassung der aussertropischen Zirkulation der Atmosphäre als Turbulenzströmung grossen Stils völlig gerechtfertigt. Die Möglichkeit dieser Auffassung ist durch die dargelegten Überlegungen gewiss gegeben. Die folgenden Abschnitte werden uns den Beweis erbringen, ob dieser an sich plausibler Gedanke zur Erklärung anderer Tatsachen herangezogen werden kann, ob diese Vorstellung in ihren Konsequenzen „das Bürgerrecht in der Wissenschaft“ zu erwerben imstande ist. Denn, wie Köppen richtig hervorhebt, hat das Aussprechen eines plausibeln Gedankens ohne genaue Beweisführung (seines Wertes) der Wissenschaft fast ebenso oft geschadet, wie genützt.

2. Der Massenaustausch zwischen niederen und höheren Breiten bei der aussertropischen Zirkulation der Atmosphäre.

Bei jeder turbulenten Strömung erfolgt durch die ungeordnete Bewegung der Flüssigkeit ein ständiger Austausch von Massen verschiedenster Grösse zwischen benachbarten Schichten. Dieser Austausch bedingt ein Durchmischen der Flüssigkeitsmassen untereinander und damit auch eine örtliche und zeitliche Änderung

¹ Siehe hierüber z. B. F. M. Exner: Dynamische Meteorologie, S. 24 u. 179.

der physikalischen Eigenschaften, die den Flüssigkeitsmassen anhaften. W. Schmidt¹ hat diesen Massenaustausch bei ungeordneter Strömung einer Flüssigkeit zum Gegenstand eingehender Untersuchungen gemacht und seine grosse Bedeutung für viele Probleme der Meteorologie bei der ungeordneten Bewegung der Luft in der Unruhe des Windes nachgewiesen. Er hat gezeigt, dass bei allen gröberen Turbulenzerscheinungen für den Mischvorgang der Flüssigkeit ein nur von den Eigenschaften der ungeordneten Bewegung abhängiges Bestimmungsstück, die „Grösse des Austausches“ oder kurz „der Austausch“ genannt, vorhanden ist, welcher die Lebhaftigkeit des Austausches benachbarter Massen misst und die ganze Turbulenz charakterisiert.

Auch bei den Turbulenzerscheinungen der atmosphärischen Zirkulation ausser-tropischer Breiten muss es eine solche Grösse der Austausches geben und die Ermittlung ihrer Grössenordnung ist einerseits zur Charakterisierung der Grösse der Turbulenz, andererseits wegen der Wichtigkeit, der aus ihr sich ergebenden Schlüsse von Bedeutung. Es scheint, dass es zunächst nicht möglich ist, die Grössenordnung des „Austausches“ aus bestimmten Eigenschaften der *mittleren* Gesamtbewegung der Luft im Polarwirbel zu ermitteln, dass es notwendig ist auf die Grundbetrachtungen und Formeln, die der Austauschgrösse zugrundeliegen, zurückzugehen, Betrachtungen, die allerdings direkt an die Bewegung eines einzelnen Massenelementes anknüpfen und ihre Lebensgeschichte zur Ableitung benützen. Aber dies ist in unserem Fall nicht von grossem Nachteil. Denn wir können dank der Grösse der Turbulenzelemente und der Länge der Ausgleichszeit die Bewegungen der einzelnen Massenelemente, die hier von grosser Ausdehnung sind, verfolgen, sozusagen ihre Lebensgeschichte angeben. In den Luftbahnen (Trajektorien) einzelner Luftteilchen, die natürlich die Repräsentanten grösserer Luftmassen sind, haben wir die synoptische Darstellung der Lebensgeschichte derselben² und aus ihnen entnehmen wir manches Bestimmungsstück, das wir benötigen.

Es ist vielleicht angezeigt die Ableitung der allgemeine Grundformel, wie W. Schmidt³ sie gegeben hat, hier mit Rücksicht auf unseren speziellen Fall kurz zu wiederholen. Wir betrachten auf einem bestimmten Breitenkreis ein senkrecht zur Erdoberfläche stehendes, nach Norden und Süden schauendes Flächenstück von Inhalte f . Die horizontalen Abstände h von ihm zählen wir positiv nach Norden, negativ nach Süden. Durch die ungeordnete Bewegung in der Richtung des Flächenstückes werden eine Anzahl von Massenteile durch das

¹ W. Schmidt: Der Massenaustausch bei der ungeordneten Strömung in freier Luft und seine Folgen. Sitzber. der Wiener Akad. 1912, 126 B. Siehe auch: Wirkungen der ungeordneten Bewegung im Wasser der Meere und Seen. Annalen der Hydrogr. u. maritim. Meteorologie, Okt. 1917.

² Siehe näheres hierüber A. Defant: Wetter und Wettervorhersage, S. 127 u. f.

³ L. c. Annalen der Hydrographie, S. 369.

Flächenstück hindurchgeschoben; sie stammen im allgemeinen von verschiedenen Abständen; jedes bringt aber die Eigenschaft s , die ihm anhaftet, so mit, wie es die selbe in seiner Anfangslage hatte, als es mit seiner Umgebung im Gleichgewichte stand.

Wird ein Massenteil mit der Masse m , das aus dem Abstände k stammt, im Verlauf des Mischvorganges durch die betrachtete Fläche geschafft, so bringt es von der Eigenschaft s die Menge $S = \sigma m \left(s + k \frac{ds}{dh} \right)$ mit. (σ ist eine Konstante.)

Während der Zeit t wird dann durch die Fläche f von Norden nach Süden von S die Menge $\sigma s \Sigma m + \sigma \frac{ds}{dh} \Sigma m k$ hindurchtreten. Die Summen sind über alle von Norden nach Süden wandernden Massenelemente zu erstrecken. Eine ähnliche Überlegung gibt für die von Süden nach Norden wandernden Massenteile die Menge $\sigma s \Sigma m - \sigma \frac{ds}{dh} \Sigma m k$. Der ursprüngliche Abstand jeder Teilmasse ist jetzt $-k$. Beide Vorgänge gleichen sich zum Teil aus und da die in der einen und anderen Richtung durchtretenden Gesamtmassen bei Betrachtung eines längeren Zeitraumes einander gleich sein müssen, bleibt für die von Süden nach Norden wandernde Menge von S bezogen auf die Flächen- und Zeiteinheit:¹

$$1.) \quad \mathfrak{S} = - \frac{\sigma}{ft} \frac{ds}{dh} \left(\Sigma m k + \Sigma m k \right) = - \sigma \frac{ds}{dh} \frac{\Sigma m k}{ft} = - \sigma A \frac{ds}{dh}$$

Die Grösse

$$2.) \quad A = \frac{\Sigma m k}{ft},$$

die ganz unabhängig von der besonderen Eigenschaft s ist, hat *W. Schmidt* den „Austausch“ genannt.

Wir gehen nun, um die Grössenordnung von A zu bestimmen, von der Formel 2 aus. Es ist natürlich nicht genau, wenn wir in dieser statt $\Sigma m k$ eine Summe $k' \Sigma m$ setzen; doch wird dies umso richtiger, je gleichartiger die Massenelemente sind, die aus einem bestimmten Abstände k von dem Flächenstück stammen und je mehr k' einem Mittelwerte aller vorkommenden k entspricht. Über die Grössenordnung von k' sind wir aber einigermassen orientiert. Aus den Luftbahnen, die *Shaw* und *Lempfert* u. a. synoptisch entworfen haben und aus der mittleren Breitenausdehnung der Zyklonen und Antizyklonen, die ja die Turbulenzelemente unserer ungeordneten Bewegung sind, folgt, dass wir nicht weit fehlgehen, wenn wir für k' 10 bis 20 Breitengrade einsetzen, also im Durchschnitt etwa 15 Breitengrade oder $1.67 \cdot 10^8$ cm.

Σm ist die Masse die durch die Fläche f — dafür nehmen wir gleich die

¹ Der Klammerausdruck in 1 lässt sich in eine einzige Summe zusammenziehen, die nun über jede Masse und den absoluten Wert ihres ursprünglichen Abstandes zu erstrecken ist.

Flächeneinheit 1 cm^2 — in der Zeit t hindurchtritt. Über die Grössenordnung dieser Masse sind wir durch die Aufzeichnungen der Anemometer orientiert. Aus den Windwegen der einzelnen Richtungen können wir für einen bestimmten Zeitraum diese Grösse angenähert berechnen. Für Potsdam¹ erhält man aus den Beobachtungen 1894—1900 hierfür z. B. folgenden Wert:

Jahresmittel: Mittlere Windrichtung $W 26.7^\circ S$. Windweg im Jahr 56,863 km. Diese Werte geben Richtung und Geschwindigkeit der mittleren Luftströmung der Zirkulation der Atmosphäre. Senkrecht zu einer in dieser Richtung gedachten Fläche erfolgt der Massenaustausch der ungeordneten Bewegung. Die Abweichung der Richtung von der West—Ostrichtung ist nicht gross; wir wollen deshalb die Richtung senkrecht hierzu gegen Norden, kurz die Nordrichtung, senkrecht hierzu gegen Süden die Südrichtung nennen. Aus den Windwegen der einzelnen Richtungen kann man natürlich auch die Windwege der Komponenten, die senkrecht auf die Richtung der mittleren Strömung stehen, also kurz die Komponenten der Nord- und Südrichtung ermitteln und diese Zahlen müssen einander gleich sein. Die Rechnung ergibt für Potsdam als

Komponente aus der Nordrichtung 47,574 km, als

Komponente aus der Südrichtung 47,527 km. Der Unterschied von 47 km ist nur als Rechenergebnis zu betrachten, die Zahlen sind tatsächlich einander gleich. Aus der Nord- und Südrichtung zusammen, werden also durch 1 cm^2 im Laufe eines Jahres insgesamt eine Luftmasse von $95,101 \cdot 10^5 \rho$ Gramm hindurchgeschoben. Für die Dichte ρ kann man für die unteren Luftschichten annähernd $\rho = 10^{-3}$ annehmen. Σm wird also für Potsdam im Jahre ($= 3.15 \cdot 10^7 \text{ sec.}$) $9.5101 \cdot 10^6 g$. Aus diesen Werten folgt

$$A = \frac{9.5 \cdot 10^6 \cdot 1.67 \cdot 10^8}{3.15 \cdot 10^7} = 5.02 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-1} g \text{ sec}^{-1}.$$

Die Grössenordnung von A ist also im absoluten Masssystem rund 10^8 . Die Windwege von Potsdam sind gewiss ein guter Repräsentant für die Luftbewegung in Mitteleuropa; doch gelten die Ergebnisse nur für die untersten Luftschichten. Es war daher angezeigt, bei einer anderen etwas höher gelegenen Station die Rechnung zu wiederholen. Wir nehmen hierzu den in der freien Atmosphäre frei gelegenen Donnersberg in Böhmen (857.5 m). Aus den mittleren Windwegen der einzelnen Richtungen² folgt als mittlere Windrichtung $W 1.9^\circ S$ und als Windweg im Jahr 84,807 km. Die Komponente senkrecht hierzu aus Norden hat einen Windweg von 75,230 km, aus Süden 75,235 km. Durch die Fläche von 1 cm^2 in der Richtung der mittleren Luftströmung wird somit im Laufe eines

¹ O. Meissner: Die Luftbewegung in Potsdam 1894—1900. Meteor. Zeitschr. 1908, S. 408.

² W. Pollak: Ergebnisse der anemometrischen Aufzeichnungen des meteor. Observatoriums auf dem Donnersberg in den Jahren 1905—1910. Prag 1919.

Jahres infolge der ungeordneten Bewegung der Zirkulation der aussertropischen Breiten eine Luftmasse von rund $1.5 \cdot 10^7 g$ hindurchgeschoben. Wir sehen, die Grössenordnung von Σm ist für 500 m Höhe etwa $1.2 \cdot 10^7$, die Grössenordnung von k' für mittlere Breiten etwa $1.5 \cdot 10^7$, daraus folgt als Grössenordnung von $A = 5.7 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-1} g \text{ sec}^{-1}$. Wir sehen gleichzeitig, dass sich die Zahl nicht wesentlich ändert, wenn wir für k' etwa 10 oder 20 Breitengrade oder für Σm einen etwas grösseren oder kleineren Wert einsetzen. Die Grössenordnung von A liegt ziemlich sicher zwischen 10^7 und $10^8 \text{ cm}^{-1} g \text{ sec}^{-1}$, eher näher an den zweiten Wert.

Wir können auch anders schliessen. Die Geschwindigkeit der Nord-Südkomponente der allgemeinen Luftströmungen können wir im Mittel zu 5 m/sec nehmen; in einer Sekunde wird dann durch 1 cm² eine Luftmasse von 0.5 g hindurchgeschoben. Wählen wir wieder k' zu 15 Breitengraden, so wird $A = 8.33 \cdot 10^7$, wählen wir hingegen für die mittlere Geschwindigkeit v einen etwas grösseren Wert, etwa 10 m/sec, so wird $A = 1.7 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-1} g \text{ sec}^{-1}$. Der Abstand k kann natürlich im Maximum die ganze halbe Breitenausdehnung der aussertropischen Zirkulation, also höchstens 30 Breitengrade erreichen; mit diesem Maximalwert wird $A =$ etwa $5 \cdot 10^8$. Für höhere Luftschichten wird v eher durch den zweiten Wert richtig angegeben; bei einem mittleren Wert von k' wird die Grössenordnung von A gerade $10^8 \text{ cm}^{-1} g \text{ sec}^{-1}$. Wir werden aus den späteren Überlegungen sehen, dass dieser Wert im Jahresmittel der Grösse des Austausches am besten entspricht.

Es gibt noch eine Methode die Grössenordnung von A zu ermitteln; sie darf auch aus einem anderen Grunde gewisses Interesse beanspruchen. Man ist gewiss berechtigt anzunehmen, dass die turbulente Bewegung fließenden Wassers oder die ungeordnete Bewegung der Luft im Winde nach denselben hydrodynamischen Gesetzen erfolgt, wie die grosse Turbulenzbewegung der Zirkulation aussertropischer Breiten. Nur die Dimensionen der einzelnen Grössen sind in den einzelnen Fällen wesentlich verschieden; die Bewegungen der einzelnen Massenteilchen sind nach dem Prinzip der geometrisch ähnlichen Bewegungen von Helmholtz¹ einander ähnlich und die Möglichkeit der Übertragung der für die Flüssigkeitsbewegung ermittelten Gesetze auf eine andere Turbulenzbewegung ist in diesem Falle gegeben.

Die zwei Flüssigkeitsbewegungen, welche wir, geometrisch einander ähnlich, miteinander vergleichen wollen, sind: erstens die ungeordnete Bewegung der Luft im Winde. Für diese seien die horizontalen Komponenten der Geschwindigkeit u und v , die Dichte ρ , die Koordinaten x , y , z , die Zeit t und die Reibungskonstante μ ; zweitens: die turbulente Bewegung der Zirkulation der Atmosphäre ausser-

¹ Siehe hiezu F. M. Exner: Dynamische Meteorologie S. 82.

tropischer Breiten; für diese seien die Geschwindigkeitskomponenten U und V , die Dichte P , die Koordinaten X, Y, Z , die Zeit T und die Reibungskonstante M . Die Verhältniszahlen dieser Grössen bezeichnen wir wie folgt:

$$M = q\mu, \quad T = \tau t, \quad P = r\rho, \quad U = nu \quad \text{und} \quad X = \xi x \\ V = nv \quad \quad \quad Y = \xi y \quad Z = \xi z.$$

Zunächst ist zu konstatieren, dass die Dichten der beiden Flüssigkeiten einander gleich sind, also $r = 1$ ist. Geometrisch ähnliche Bewegungen beider gleichdichten Flüssigkeiten sind dann, wie Exner gezeigt hat, möglich, wenn $\xi = \sqrt[3]{q^2}$ und $n = \sqrt[3]{2q}$ ist. Die zweite Flüssigkeit hat also in grösseren Räumen und bei grösseren Geschwindigkeiten mit der ersteren ähnliche Bewegungen, wenn gleichzeitig die Reibungseinflüsse grösser sind.

Nun kennen wir sowohl die Verhältniszahl ξ als auch die Zahl n . Der Radius eines Turbulenzelementes der ersten ungeordneten Bewegung ist nach Barkow¹ etwa 4000 cm, jene der zweiten etwa 15 Breitengrade, also rund $1.7 \cdot 10^7$ cm.

Demnach wird $\xi = \frac{1.7 \cdot 10^7}{4 \cdot 10^3} = 4.2 \cdot 10^4$. Nun ist $q = \sqrt{\xi^3}$ oder in unserem

Falle $q = 8.61 \cdot 10^6$. Der Koeffizient der virtuellen Reibung ist bei der ungeordneten Bewegung der Luft im Winde nach Hesselberg $\mu = 50 \text{ cm}^{-1} g \text{ sec}^{-1}$; da nun $M = q\mu$ ist, folgt als Reibungskoeffizient der ungeordneten Bewegung der aussertropischen Zirkulation, der nach Schmidt identisch ist, mit der Grösse des Austausches, $M = A = 50 \cdot 8.61 \cdot 10^6 = 4.3 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-1} g \text{ sec}^{-1}$. Wählen wir den Radius der Turbulenzelemente der zweiten Bewegung mit 10 bzw. 20 Breitengrade, so wird q etwa $5 \cdot 10^6$ bzw. $13 \cdot 10^6$ und $A = 2.5 \cdot 10^8$ bzw. $6.5 \cdot 10^8$. Die Grössenordnung von A ist also auch nach dieser Methode rund $10^8 \text{ cm}^{-1} g \text{ sec}^{-1}$.

Die zweite der obigen Formeln betrifft die Geschwindigkeiten. Für u und v können wir im allgemeinen Mittel etwa 2 m/sec annehmen. Für U und V müssen wir jene Geschwindigkeiten nehmen, welche bei der Zirkulation der Atmosphäre in den aussertropischen Breiten auftreten würden, falls keine Reibungseinflüsse vorhanden wären. Bei Erhaltung des Rotationsmomentes würden die resultierenden Geschwindigkeiten bei Luftverschiebungen im meridionaler Richtung die Grössenordnung von 300 m/sec erreichen. Es wäre dann $n = \frac{U}{u} = 150$ und

$q = n^3 = 3.4 \cdot 10^6$. Wählen wir $U = 200$ bzw. 400 m/sec, so wird $q = 10^6$ bzw. $8 \cdot 10^6$. Im Durchschnitt ist also $q = 3 \cdot 10^6$ und daraus folgt $M = A = 1.5 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-1} g \text{ sec}^{-1}$. Auch aus dieser Betrachtung folgt die Grössenordnung A zu etwa $10^8 \text{ cm}^{-1} g \text{ cm}^{-1}$.

Das Prinzip geometrisch ähnlicher Bewegungen liefert für die Austauschgrösse dieselbe Grössenordnung wie die frühere Methode. Der gefundene Zahlenwert

¹ l. c.

ist sehr gross; aus ihm erhellt die ausserordentliche Bedeutung, die der Turbulenz der aussertropischen Zirkulation für die Meteorologie gemässiger Breiten zukommt. Durch diesen Wert wird die grosse Hemmung der aussertropischen Zirkulation scharf charakterisiert, welche verhindert, dass nicht viel heftigere Winde auftreten. Sie erfolgt, wie schon Helmholtz hervorgehoben hat, nicht so sehr durch Reibung an der Erdoberfläche sondern durch Vermischung verschieden bewegter Luftschichten, durch Wirbel, also durch Turbulenzerscheinungen grossen Stils.

Die Grösse des Austausches unterliegt auf der Erde natürlich grossen örtlichen und zeitlichen Schwankungen. Von diesen mag hier nur die jährliche Periode hervorgehoben werden, da wir von dieser wenigstens die Hauptzüge kennen. A wird infolge der häufigeren und grösseren Störungen, welchen die aussertropische Zirkulation im Winter unterliegt, in der kalten Jahreszeit gewiss grösser sein als in der warmen, in der flache Druckgebilde auch nur geringere Luftmassenverschiebungen in meridionaler Richtung hervorbringen; von der Grösse der letzteren hängt aber A in erster Linie ab.

Die Grösse des Austausches und die Grösse der unperiodischen Druckänderungen müssen wohl einander parallel gehen; vielleicht gelingt es eine nähere Charakterisierung des Austausches, namentlich was seine zeitlichen und örtlichen Veränderungen betrifft, durch die Grösse der unperiodischen Luftdruckänderungen zu geben. Wir begnügen uns hier zunächst seine Grössenordnung zu $10^8 \text{ cm}^{-1} \text{ g sec}^{-1}$ festgelegt zu haben.

Man könnte sich die Frage vorlegen, ob es nicht möglich wäre, die Grösse des Austausches (der Turbulenzreibung) der aussertropischen Zirkulation durch Vergleich der mittleren Luftbewegung an einer Stelle des Polarwirbels mit dem mittleren Luftdruckgradienten an dieser Stelle auf eine ähnliche Weise zu berechnen, wie man die virtuelle Reibung der Luftbewegung aus Druckgefälle und Windstärke mittels der synoptischen Wetterkarten ermittelt. Die mittlere Stärke der Zirkulation im Polarwirbel und das mittlere Druckgefälle müssten in diesem Falle aus Monats- bzw. Jahresmittel-Darstellungen der betreffenden Elemente entnommen werden. Diese Methode zur Berechnung der Grösse A versagt aber; sie ergibt, wie das Resultat zeigt, nicht die Grösse der Turbulenzreibung der aussertropischen Zirkulation, sondern Zahlenwerte, die der Grösse der virtuellen Reibung der ungeordneten Luftbewegung im Winde sehr nahe kommen. Dies ist aber, wenn man die Sache genau überlegt, ganz richtig. Man würde die Grösse des Austausches nur dann erhalten, wenn die ungeordnete Bewegung der Luftmassen in der Zirkulation der Atmosphäre die Luftdruckverteilung nicht wesentlich zu beeinflussen imstande wäre. Dann würde ein Vergleich zwischen der tatsächlichen Luftbewegung und der aus dem Druckgefälle berechneten die Scheinreibung der ungeordneten Bewegung ergeben. Nun ist es aber gewiss,

dass die Turbulenz der aussertropischen Zirkulation die gesammte Luftdruckverteilung der höheren Breiten wesentlich beeinflusst, sodass Luftbewegung und Druckgefälle im allgemeinen Mittel sich auf jene Werte ausgleichen, die wir tatsächlich beobachten. Es kann sich auch gar nicht anders verhalten und die theoretischen Überlegungen Reynolds¹ über die Grundgleichungen der Turbulenz zeigen deutlich, dass durch die ungeordnete Bewegung in einer allgemeinen Strömung nicht nur die Geschwindigkeit derselben, sondern auch die Druckverteilung wesentlich beeinflusst werden, wenn wir mittlere Werte der einzelnen Grössen betrachten. Mit den Geschwindigkeiten werden bei Mittelbildung über einen längeren Zeitraum auch die Druckdifferenzen herabgesetzt und aus letzteren kann man nicht die Geschwindigkeitsverteilung berechnen, die der laminaren Strömung entsprechen würde. Aus diesem Grunde versagt hier diese Methode.

Auch bei der ungeordneten Luftbewegung im Winde stört diese das erzeugende Druckgefälle. Dieses Druckgefälle ist aber nicht jenes, das zur Ermittlung des Koeffizienten der virtuellen Reibung und zur Berechnung der theoretischen Windstärke genommen wird. Dieses letztere wird bestimmt aus Luftdruckbeobachtungen an Orten, die weit entfernt sind von der ungeordneten Luftströmung, die wir gerade beobachten und von dieser auch nicht beeinflusst sind. Durch die ungeordnete Luftbewegung an den Orten der Luftdruckbeobachtung selbst kann aber ein Fehler miteingeführt werden und dies ist wohl die Ursache, dass die Grösse des Koeffizienten der virtuellen Reibung, die nach dieser Methode ermittelt wird, stets um etwa das zehnfache kleiner ist, als die auf anderem Wege ermittelten Werte.

3. Über die Stabilität der aussertropischen Zirkulation.

Die atmosphärische Zirkulation der aussertropischen Breiten, wie sie sich in den allgemeinen Mittelwerten als zonale Luftbewegung (längs der Parallelkreise) darstellt, ist nach Helmholtz², der die Bedingungen dafür aufgesucht hat, stabil. Die bestehenden Bewegungen, sowie die ungleiche Temperatur- und Druckverteilung geben nicht Veranlassung zu einem Umsturz der Schichten und können auf der Erde dauernd bestehen. Die Bedingungen der Stabilität sind folgende: 1.) Die Flächen gleicher potentieller Temperatur müssen über den Horizont gegen den Pol hin ansteigen; jedoch stets unter der Höhe des Himmelspols bleiben. Die kalten Schichten müssen daher von den Polen her keilförmig unter den

¹ Siehe weiteres hierüber H. Lamb: Lehrbuch der Hydrodynamik, II. Aufl., S. 743.

² Siehe hierüber F. M. Exner: Dynamische Meteorologie, S. 167 u. 189 ff.

warmen liegen. 2.) Die Rotationsmomente der bewegten Luft müssen gegen den Äquator hin zunehmen.

Die vorhandenen Beobachtungen ergeben, wie Exner eingehend dargelegt hat, dass die Bedingungen der stationären Bewegung in zonaler Richtung in den gemässigten Breiten der Erde für die Troposphäre, wenn wir Mittelwerte längerer Zeiträume betrachten, gut erfüllt sind; wir schliessen daraus nach Helmholtz, dass die aussertropische Zirkulation eine gewisse Stabilität besitzt.

Nun wissen wir aber, dass die aussertropische Zirkulation in der Form, in der wir sie aus Mittelwerten längerer Zeiträume erhalten, den tatsächlichen Bewegungen der Atmosphäre in diesen Breiten nicht entspricht, sondern nur eine Abstraktion aus einer wesentlich komplizierteren Zirkulation darstellt. Schon Helmholtz hat darauf hingewiesen, dass an den Grenzen der Passate gegen die Luftbewegungen der höheren Breiten die ungleichen Bewegungen und die verschiedenen Temperaturen bald zu Wellenbildungen, zu Wirbeln und Vermischungen in beiden Schichten Veranlassung geben müssen. Nach F. M. Exner muss auch über den polaren Ostwinden eine Mischungszone erwartet werden. Die aussertropische Zirkulation in einfach zonaler Richtung zerfällt dadurch, wie wir wissen, zu einer stark turbulenten Strömung, in der wenigstens scheinbar die atmosphärischen Störungen die Oberhand gewinnen derart, dass in den unteren Luftschichten von der regelmässigen zonalen Luftbewegung fast nichts mehr zu erkennen ist.

Es ergibt sich nun die Frage: sind die Störungen der allgemeinen Zirkulation der aussertropischen Breiten, die in der nach Helmholtz stabilen zonalen Luftbewegung von Westen nach Osten eingebettet sind, ebenfalls stabil, ist auch die *turbulente Zirkulation* an sich eine stabile Erscheinung oder besteht für die scheinbar regellose Wirbelbildung der aussertropischen Zirkulation, eine gewisse Labilität?

Über die Stabilitätsfragen laminarer und turbulenter Strömungen sind wir nur wenig unterrichtet. Lord Rayleigh hat es in verschiedenen Arbeiten unternommen, die Stabilität verschiedener Anordnungen von Wirbeln zu untersuchen, die in einer linearen Strömung eingebettet sind und letztere zu einer turbulenten Strömung machen. Diese Störungen können durch Reibungseinflüsse, oder wie Helmholtz angenommen hat, durch Aufrollung von Diskontinuitätsflächen hervorgerufen werden. Dies ist an dieser Stelle gleichgiltig; hier handelt es sich nur zu untersuchen, ob die einmal in der laminaren Strömung vorhandenen Störungen, also die „gestörte“ Bewegung *bei bestimmter Form der Störungen* an sich eine stabile Erscheinung darstellt oder mit der Zeit labil wird, die Störungen also mit der Zeit sich auflösen und verschwinden.

Die Anwendung der Rayleigh'schen Resultate auf die Zirkulation in den aussertropischen Breiten ist wohl nicht ohne weiteres erlaubt; aber trotz der wesentlich anderen Bedingungen, unter denen diese ungeordnete Strömung steht, scheinen

doch die dort gewonnenen Ergebnisse einiges Licht auf die Frage der Stabilität der aussertropischen Zirkulation zu werfen.

In der zweidimensionalen Form des Problems¹ betrachten wir eine Flüssigkeitsschicht mit ungeordneter Strömung (Wirbelbewegung) in der Richtung der x -Achse, die von den Ebenen $y = \pm h$ begrenzt wird. Ausserhalb dieser Grenzen soll die Flüssigkeitsbewegung überall stetig sein und mit gleichförmiger Geschwindigkeit $U = \pm u$ vor sich gehen. Die Geschwindigkeiten diesseits und jenseits der ungeordneten Strömung in der Mitte, sollen gleich gross, jedoch einander entgegengesetzt sein. Für $y > h$ soll demnach $U = u$, für $y < -h$ hingegen $U = -u$ und dazwischen möge ein linearer Abfall der Geschwindigkeit vorhanden sein derart, dass für $h > y > -h$ $U = \frac{uy}{h}$ ist. Wir fragen: welche Art von turbulenter Strömung ist bei stabilen Verhältnissen in der Zwischenschicht möglich?

Bei einer kleinen Störung der stationären Laminarbewegung in der x -Richtung mit den Geschwindigkeiten $u = U$, $v = 0$, $w = 0$, wo U in den einzelnen Teilen der Flüssigkeitsmasse obige, nur von y abhängige Werte annimmt, seien die Geschwindigkeiten der gestörten Bewegung $u = U + u'$, $v = v'$ und $w = 0$. Nimmt man für u' und v' Störungen an, die in bezug auf x und der Zeit t periodisch sind, nehmen wir also u' und v' proportional $e^{ikx + i\sigma t}$, so reduzieren sich die Differentialgleichungen der Bewegung für v' nach den Untersuchungen Rayleighs auf die Gleichung

$$1.) \quad \frac{d^2 v'}{dy^2} - k^2 v' = 0.$$

Wir bemerken, dass die obige Annahme besagt, dass sowohl u' wie v' im reellen Teil die Form fortschreitender Wellen mit der Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ und der Periode $T = \frac{2\pi}{\sigma}$ besitzen. Die Lösung der Differentialgleichung 1 ergibt eine Bedingungsleichung zwischen σ und k in der Form

$$2.) \quad \sigma^2 = \frac{u^2}{4h^2} \left[(2hk - 1)^2 - e^{-4hk} \right].$$

Die Frage nach der Stabilität von Störungen von der Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ hängt demnach davon ab, ob der Klammerausdruck auf der rechten Seite der Gleichung 2 reele oder imaginäre Werte hat, also vom Verhältnis $\frac{\lambda}{2h}$. Für grosse

¹ Siehe Lamb, Hydrodynamik § 345.

Werte von kh wird $\sigma = \pm ku$, was eine stabile ungeordnete Strömung anzeigt. Die Labilität der Strömung beginnt, wie man leicht ermitteln kann, wenn $\frac{\lambda}{2h}$ grösser als ungefähr 5 wird.

Aus diesen Ergebnissen kann man schliessen, dass auch die aussertropische West-Ostströmung, begrenzt einerseits bei 30° Nordbreite von der westwärts gerichteten Passatströmung, andererseits von der Ost-Westströmung des Polarbeckens eine stabile turbulente Bewegung darstellen kann, wenn die Turbulenzelemente eine gewisse Grösse nicht überschreiten. Wollen wir die Beziehung, dass für eine stabile ungeordnete Bewegung $\frac{\lambda}{2h} \leq 5$ sein muss, zahlenmässig anwenden, so müssen wir für $2h$, das ist für die Breitenausdehnung der mittleren turbulenten Strömung etwa 40 Breitengrade (zwischen 30° und 70° NBr.) setzen, oder rund $h = 4 \cdot 10^8$ cm. Stabilität würde eintreten, wenn λ kleiner als $2 \cdot 10^9$ cm ist. Der Erdumfang beträgt in 60° Breite $4 \cdot 10^9 \cos 60^\circ = 2 \cdot 10^9$ cm. Die Bedingung der Stabilität würde demnach fordern, dass *die Wellenlänge der Störungen, in unserem Falle der Luftdruckwellen, kleiner oder höchstens gleich dem Erdumfang sei.*

Es ist nun bekannt und für die Art der Störungen der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre sehr bezeichnend, dass die längsten Wellen, die bisher gefunden wurden, höchstens den Erdumfang als Wellenlänge aufweisen¹; längere konnten bisher nicht konstatiert werden; wenn Störungen grösserer Wellenlänge auftreten, so scheinen sie labil zu sein, d. h. binnen kurzer Zeit einzugehen und sich aufzulösen. Diese Tatsache scheint darauf hinzudeuten, dass obige Grenzbedingung auf die Zirkulation der Atmosphäre in den gemässigten Breiten noch Geltung hat, wenn wir uns auch nicht verhehlen wollen, dass die Grundlagen der Rechnung in bezug auf den betrachteten Fall höchst mangelhaft sind.

Für die meisten Störungen der aussertropischen Zirkulation kann man gewiss kh als gross annehmen; dann ist aber, wie erwähnt $\sigma = ku$. Daraus folgt, dass $\lambda = Tu$ oder $u = \frac{\lambda}{T} = \text{konstant}$. Für alle Störungen muss demnach im Falle der Stabilität das Verhältnis von Wellenlänge und Periode der Welle eine Konstante sein. *Alle Druckstörungen pflanzen sich mit derselben Fortpflanzungsgeschwindigkeit fort und diese entspricht der Geschwindigkeit der allgemeinen Strömung der aussertropischen Zirkulation.* Dieses theoretische Ergebnis stimmt völlig überein mit dem Resultate einer eingehenden Untersuchung, die ich seinerzeit über die Störungen der allgemeinen Zirkulation mitgeteilt habe; alle „Wellen“ (Störungs-

¹ Siehe A. Defant: Die Veränderungen der allgemeinen Zirkulation in den gemässigten Breiten der Erde. Wiener Sitz. Ber. Bd. 121. 1912.

gebiete mit Wellencharakter) hatten gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit und diese betrug auf der Nordhemisphäre rund 45 km pro Stunde. Die mittlere Geschwindigkeit der West-Ostströmung der aussertropischen Zirkulation wäre nach der Theorie im Mittel ebenfalls 45 km pro Stunde bzw. 12.5 m/sec, ein Wert, der gewiss von der Wirklichkeit nicht stark abweichen kann.

Diese Überlegungen führen zu dem Schlusse, dass die aussertropische Zirkulation, als turbulente Strömung aufgefasst, mit ihren Störungsgebilden eine stabile Erscheinung darstellt, sogar vielleicht stabiler ist, als eine entsprechende laminare Strömung.

4. Die Folgen des Massenaustausches auf den Wärmehaushalt der Atmosphäre.

Die Grundgleichung 1.) $\mathcal{S} = -\sigma A \frac{ds}{dh}$ besagt, dass durch den ständigen Austausch der Massen von Schichte zu Schichte die ungeordnete Bewegung der Flüssigkeit bei einem Gefälle der Eigenschaft s in der Richtung h ein stetiges Fortwandern der mit der Masse verknüpften Grösse S in der Richtung von höheren zu niederen s bewirkt. Durch die Einheit einer zum Gefälle senkrechten Fläche fliesst in der Zeiteinheit die Menge \mathcal{S} . Die ungeordnete Bewegung bedingt demnach stets eine Herabsetzung des Gefälles der Eigenschaft s , falls letzteres nicht durch andere Umstände immer wieder neu erzeugt wird.

Wir wenden nun diese Überlegungen auf die turbulente Bewegung der Luftmassen in der aussertropischen Zirkulation der Atmosphäre an. Nehmen wir für die Grösse S Wärmemengen, dann sind die s Temperaturen, σ die spezifische Wärme bei konstantem Druck und Gleichung 1 gibt den Wärmefluss, der zufolge der ungeordneten Bewegung der Zirkulation in den gemässigten Breiten der Erde von niederen Breiten gegen höhere Breiten besteht. Die Grösse dieses Wärmeflusses können wir nun zahlenmässig ermitteln, da die Grössenordnung von A im dritten Abschnitt zu $10^8 \text{ cm}^{-1} \text{ g sec}^{-1}$ gefunden wurde und die anderen Grössen ebenfalls bekannt sind. In 40 bis 50° NBreite beträgt das meridionale Temperaturgefälle im Jahresmittel 7.7° C für 10 Breitengrade. Dies gibt $\frac{ds}{dh} = 7.7 : 1.1 \cdot 10^8 = 7.10^{-8} \text{ }^\circ\text{C/cm}$ und es wird $\mathcal{S} = 0.238 \cdot 10^8 \cdot 7 \cdot 10^{-8} = 1.67 \text{ g cal cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$, oder 100 g cal pro cm^2 und Minute.

Durch die ungeordnete Zirkulation der Atmosphäre wird im allgemeinen Durchschnitt durch ein zur Erdoberfläche senkrecht, gegen Norden schauendes Quadratcentimeter pro Minute die grosse Wärmemenge von rund 100 g cal von Süden

nach Norden hindurchgeschoben. Der durch die Zirkulation der aussertropischen Breiten bedingte Wärmefluss von den äquatorialen gegen die polaren Gebiete der Erde ist von ausserordentlicher Wichtigkeit für den ganzen Wärmehaushalt der Atmosphäre. Die Idee, die aussertropische Zirkulation als einen turbulenten Vorgang grossen Stils aufzufassen, hat uns die Möglichkeit gegeben die Grössenordnung dieses Wärmeflusses zu ermitteln, über welche bisher trotz der grossen Bedeutung der Erscheinung für manche grundlegende Probleme der Atmosphäre nicht genaueres angegeben werden konnte. Wir staunen zunächst über die Grösse dieser gegen die höheren Breiten hin abfliessenden Wärmemengen, doch werden die folgenden Untersuchungen lehren, dass der gefundene Zahlenwert in konsequenter Durchführung des entwickelten Gedankens nicht zu gross ist und sich in glänzender Weise einfügt in manche Betrachtungen über den Wärmehaushalt unsererer Atmosphäre.

Die enorme Wärmemenge, die von den niederen Breiten gegen die höheren durch die ungeordnete Zirkulation der Atmosphäre, wenn wir grössere Zeiträume betrachten, in stetiger Weise verschoben wird, dient zum weitaus grössten Teile dazu, die Temperatur der höheren Breiten auf jene relativ hohen Werte zu erhalten, die wir tatsächlich beobachten. Jene Wärmemenge, welche in einem cm^3 Luft stecken bleibt und zu seiner Temperaturerhöhung dient, hängt natürlich davon ab, wie sich das Temperaturgefälle in der Richtung von Süden nach Norden ändert. Eine einfache Rechnung lehrt uns, dass diese Wärmemenge relativ klein ist. Machen wir die plausible Annahme, dass in 40° NBreite das Temperaturgefälle 8° pro 10 Breitengrade, in 45° Breite hingegen bloss 7° pro 10 Breitengrade beträgt, ein Unterschied der in Verhältnis zu der tatsächlich beobachteten Temperaturabnahme gegen den Pol ziemlich gross ist, nehmen wir also an, dass $\frac{ds}{dh}$ für 40° NBr. $7.2 \cdot 10^{-8}$, für 45° NBr. hingegen $6.3 \cdot 10^{-8} \text{ }^\circ\text{C}$ pro cm beträgt, so fliesst pro cm^2 in 40° Breite die Wärmemenge 1.72 g cal/sec ein, in 45° Breite aber die Wärmemenge 1.50 g cal/sec aus. In der ganzen Luftsäule, deren Volumen $5.56 \cdot 10^7 \text{ cm}^3$ und deren Masse rund $5.56 \cdot 10^4 \text{ g}$ beträgt, verbleibt eine Wärmemenge von 0.22 g cal/sec oder pro cm^3 eine Wärmemenge von $4 \cdot 10^{-9} \text{ g cal/sec}$. Die einem Gramm Luft im Laufe einer Stunde auf diesem Wege zugeführte Wärmemenge würde nur $1.44 \cdot 10^{-2} \text{ g cal}$ und die dadurch bedingte Temperaturerhöhung 0.06°C pro Stunde betragen. Das sind alles Zahlengrössen, die die Grössenordnung der sonst in der Atmosphäre wirksamen Wärmequellen besitzen, ein Umstand, der nur aufmerksam macht, dass wir die in der ungeordneten Bewegung der aussertropischen Zirkulation ihren Grund habende, eben besprochene Wärmequelle für die höheren Breiten der Erde nicht vernachlässigen können, wollen wir uns nur einigermassen Rechenschaft geben über den Wärmehaushalt der Erde als Ganzes und in ihren Teilen.

Ich will nicht behaupten, dass man bisher diesen Umstand nicht näher beachtet hätte; doch war es bis jetzt nicht möglich ihn zahlenmässig in Rechnung zu stellen; dass die Auffassung der aussertropischen Zirkulation der Atmosphäre als turbulente Bewegung grossen Stils uns dies gestattet hat, wollen wir als ein gutes Anzeichen dafür ansehen, dass sie wenigstens als Arbeitshypothese gut brauchbar ist.

v. Bezold¹ hat sich in einer beachtungswerten Abhandlung näher mit dem Wärmeaustausch an der Erdoberfläche und in der Atmosphäre befasst und einige allgemeine Sätze darüber mitgeteilt, die sich auf die gewiss berechnete Annahme stützen, dass die Erde sich wenigstens innerhalb der Zeiträume, die unseren Beobachtungen zugänglich sind, in einem stationären oder richtiger in einem periodisch stationären Wärmestand befindet. Die ersten drei dieser allgemeinen Sätze lauten folgendermassen:

I. „Die im Laufe eines Jahres der ganzen Erde durch Bestrahlung zugeführten und durch Ausstrahlung entzogenen Wärmemengen sind im Durchschnitt einander gleich.“

II. „Die Wärmemengen, welche einem Stücke der Erdoberfläche oder der Atmosphäre auf den verschiedenen möglichen Wegen im Laufe eines Jahres zugeführt oder entzogen werden, sind einander im Durchschnitt gleich.“

III. „Die Wärmemengen, welche einzelnen Stellen der Erdoberfläche oder der Atmosphäre im Laufe eines Jahres durch Strahlung zugeführt und durch Ausstrahlung entzogen werden, sind im allgemeinen einander *nicht* gleich; es gibt vielmehr Teile der Erde, an denen die Einstrahlung, und andere, an denen die Ausstrahlung überwiegt.“

Die ersten zwei Sätze sind eine unmittelbare Folge der Voraussetzung, dass sich Sonne und Erde in einem stationären Zustande befinden, d. h. dass man überhaupt berechnen kann, von Mittelwerten der verschiedenen in Betracht kommenden Grössen zu sprechen. Der dritte Satz folgt aus der Tatsache, dass dem äquatorialen Gürtel der Erde immerfort durch „Konvektion“ Wärme entzogen wird, die bei konstanter Mitteltemperatur dieser Gebiete durch überwiegende Einstrahlung ersetzt werden muss. Die polaren Gegenden weisen hingegen eine beständige Wärmezufuhr durch „Konvektion“ aus niederen Breiten auf und diese muss durch überwiegende Ausstrahlung paralysiert werden, wenn die Mitteltemperatur konstant bleiben soll. Die ganze Atmosphäre zerfällt demnach in 3 Zonen: eine äquatoriale, in welcher die Einstrahlung und in zwei polaren, in welchen die Ausstrahlung überwiegt. Schematisch kann man sich demnach nach v. Bezold diesen Wärmeaustausch innerhalb der Atmosphäre im Jahresmittel durch einen Wärmestrom ersetzt denken, der in der äquatorialen Zone durch die Begrenzungs-

¹ Gesammelte Abhandlungen Nr. XV. Vieweg & Sohn 1906.

fläche der Atmosphäre eintritt und nachdem er sich in zwei Äste gespalten hat, in den polaren Zonen austritt.

Man erkennt ohne weiteres, dass bei diesen Überlegungen der durch die turbulente Bewegung der aussertropischen Zirkulation der Atmosphäre bedingte Wärmestrom von niederen in höheren Breiten eine Hauptrolle spielen muss und nur auf diesem Wege die äquatoriale Wärme in die gemässigten und polaren Breiten der Erde gelangt. Denn die gewöhnliche Wärmeleitung gibt hier gegenüber dem ausserordentlich grossen Massenaustausch der ungeordneten Bewegung gar nichts aus. Der Überschuss an Einstrahlung in der äquatorialen Zone wird, wie man sich früher auszudrücken pflegte, durch die „Konvektion“ nach den polaren Gebieten geschafft und wird hier durch überwiegende Ausstrahlung wieder ausgeglichen. Wir erkennen nun, auf welchem Wege diese nach den Polen erfolgende Wärmeüberführung stattfindet, wie diese „zusammengesetzte Konvektion“ beschaffen ist und welche Wärmemengen in stetiger Weise verschoben werden, wenn wir uns an Stelle des ungeordneten Austausches innerhalb der Atmosphäre einen regulären Wärmestrom gesetzt denken.

Schon aus anderen Überlegungen ist man zu dem Schlusse gekommen, dass den Luftmassen der Troposphäre mittlerer Breiten Temperaturen zukommen, die den Strahlungsverhältnissen an Ort und Stelle gewiss nicht entsprechen, dass zur Erhaltung dieser Temperaturen für die mittleren und höheren Breiten noch eine ergiebige Wärmequelle vorhanden sein muss, die ausschlaggebend für die meridionale Wärmeverteilung in der Atmosphäre ist. Eine Luftmasse in mittleren Breiten erhält im Jahresdurchschnitt, wie wir nun wissen, eine gewisse Wärmemenge durch direkte Sonnenstrahlung S , eine weitere Wärmemenge \mathcal{E} durch den in der ungeordneten Bewegung der aussertropischen Zirkulation bedingten Wärmetransport aus niederen Breiten und verliert endlich eine Wärmemenge A durch Ausstrahlung in den freien Weltenraum. Da stationärer Zustand herrscht, muss im Jahresmittel $S + \mathcal{E} = A$ sein.

Durch Emden's¹ Untersuchungen ist es gewiss, dass der Effekt der Sonnenstrahlung bei der Erzeugung der mittleren konstanten Temperatur eines bestimmten Breitenkreises von jenem der allgemeinen Zirkulation übertroffen wird, dass „die Luftmassen mittlerer Breiten ihr Strahlungsvermögen nicht an Ort und Stelle, sondern namentlich im Winter in äquatorialen Gebieten empfangen und uns von dort zugeführt haben“. Die Bedeutung der Turbulenz der aussertropischen Zirkulation für den Wärmehaushalt der Erdatmosphäre erhellt besonders aus diesem Umstande. Durch die Turbulenz werden grosse Entropiemengen nach höheren Breiten geschafft, erst dadurch die Atmosphäre befähigt die Strahlung der unte-

¹ R. Emden, Über Strahlungsgleichgewicht und atmosphärische Strahlung, Sitzberichte der Kgl. bayrischen Akad. 1913.

ren Schichten gegen den Weltraum auf jene Werte herabzusetzen, die wir tatsächlich beobachten.

Würden wir imstande sein, die Atmosphäre der mittleren und höheren Breiten gegen den von den äquatorialen Gegenden her erfolgenden Wärmestrom abzuschliessen oder was dasselbe bedeutet, würde es uns möglich sein, die ungeordnete Bewegung der aussertropischen Atmosphäre aufzuheben und in eine geordnete, laminare Bewegung umzuformen, so wäre das Wärmegleichgewicht der Luftmassen mittlerer und höherer Breiten beträchtlich gestört. Die Temperaturen müssten in der ganzen Troposphäre sich den Temperaturen des reinen Strahlungsgleichgewichtes nähern; diese liegen aber bekanntlich bedeutend tiefer als die jetzt herrschenden.

Hergesell¹ hat in einer interessanten Untersuchung auf Grund einer wirklichen mittleren Temperatur- und Dampfdruckverteilung jene Strahlungsströme bestimmt, welche die Atmosphäre vermöge ihrer Temperatur- und Dampfdruckverteilung in vertikaler Richtung durchsetzen und die Wärmebilanz der einzelnen Schichten der Troposphäre ermittelt, unter der stillschweigenden Voraussetzung, dass neben der Sonnenstrahlung und der Ausstrahlung keine anderen Faktoren vorhanden sind, welche die Temperaturverteilung zu beeinflussen vermögen. Da die Temperatur- und Dampfdruckmittel, die der Rechnung zugrunde liegen, einem stationären Zustand entsprechen, also als konstant zu betrachten sind, wäre zu erwarten gewesen, dass in jeder Schichte die durch die Strahlungsprozesse erzeugten Wärmemengen zusammen die Summe Null ergeben müssen. Dies war aber in keiner Weise der Fall. Durch die Strahlungsprozesse allein würde eine nicht unwesentliche, fortschreitende Abkühlung der einzelnen Schichten der Troposphäre erfolgen. Erst durch Hinzufügung einer nicht unbedeutenden Wärmemenge X wird ein stationärer Zustand erreicht.

Hergesell hat diese Wärmemenge X zum grössten Teil der Kondensation- und vertikalen Konvektionswärme zugeschrieben. Warum ich nicht der Ansicht bin, dass in X grösstenteils die Kondensationswärme steckt, habe ich an anderer Stelle auseingelegt². In der Grösse X erscheint nach obigen Überlegungen wohl zum grössten Teil jene Wärmemengen, die durch die ungeordnete Bewegung der aussertropischen Zirkulation aus den äquatorialen Gebieten stetig gegen die Pole hin verschoben werden und die wir kurz als die Turbulenzwärme bezeichnen können. Erst mit dieser Wärmemenge zusammen geben Sonnenstrahlung und Ausstrahlung einen stationären Zustand, in dem die Temperaturen im Mittel sich nicht ändern. Gegenüber dieser bedeutenden Wärmequelle spielen örtliche Kondensationen und Konvektion keine wesentliche Rolle mehr. Auch die Grössen-

¹ H. Hergesell, Die Strahlung der Atmosphäre unter Zugrundelegung von Lindenberger Temperatur- und Feuchtigkeitsmessungen. Arbeiten des Lindenberger aeronautischen Obs. XIII Bd. 1919.

² Siehe Meteorologische Zeitschrift Bd. 1920.

ordnung der von Hergesell ermittelten Wärmemenge X , die in höheren Breiten in etwa 1500 m Höhe ein Maximum erreicht, und über 2000 m rasch mit der Höhe abnimmt, stimmt der Grössenordnung nach mit jener Wärmemenge, die wir aus der ungeordneten Bewegung der Atmosphäre für mittlere Verhältnisse abgeleitet haben, gut überein.

Aus allem ersehen wir wieder, welche Wichtigkeit der ungeordneten Bewegung der Luftmassen in der aussertropischen Zirkulation für die meridionale Wärmeverteilung auf der Erde zukommt. Die Sonnenstrahlung allein bedingt wohl, wie Emden richtig hervorhebt, die mittlere Jahrestemperatur der Erdoberfläche *als Ganzes*; ihre Veränderungen mit der Breite und die jahreszeitlichen Abweichungen vom Mittelwert werden aber zum grossen Teil durch andere Faktoren geregelt. Unter diesen spielt die Turbulenz der aussertropischen Zirkulation der Atmosphäre die Hauptrolle; sie schafft die nötigen Entropiemengen nach den höheren Breiten, sie reguliert den Ausgleich der Temperaturen im Wechsel der Jahreszeiten, sie begünstigt die Ausbildung von Temperaturverhältnissen in höheren Breiten der Erde, unter denen Menschen, Tiere und Pflanzen erst leben und gedeihen können, sie besorgt die gleichmässige Verteilung der Sonnenstrahlung über die ganze Erde und verhindert dadurch, dass in den äquatorialen Gebieten alles infolge der Hitze verdorrt und in den höheren Breiten hingegen alles in Kälte erstarrt. Sie ist eines der grossartigsten Phänomene, die wir auf unserer an grossartigen Naturerscheinungen gewiss nicht armen Erde bewundern können.

5. Die meridionale Temperaturverteilung in der Atmosphäre.

In den mittleren und höheren Breiten der Erde besteht nach den Überlegungen des vierten Abschnittes im Jahresdurchschnitt für jedes Massenelement vollständiger Wärmegleich zwischen Sonnenstrahlung und Turbulenzwärme einerseits und Ausstrahlung andererseits. Die Erdoberfläche und die Atmosphäre würden sich bei völliger Ausschaltung der ungeordneten Bewegung der aussertropischen Zirkulation auf jene Temperaturen einstellen, die unter der Bezeichnung „Strahlungstemperaturen“ bekannt sind. Einstrahlung durch die Sonne und Ausstrahlung in den freien Weltraum bedingen ihre Verteilung auf der Erdoberfläche und letztere würde, falls die Bestrahlung nicht zu kurze Zeit dauert, wirklich diese Temperatur annehmen, da die gewöhnliche Wärmeleitung in meridionaler und vertikaler Richtung nur eine untergeordnete Rolle spielt¹. Die mittleren Strahlungs-

¹ Siehe hiezu Emden: l. c. S. 132 u. ff.

temperaturen für das Jahr können nach dem Stefan'schen Gesetze aus den den einzelnen Breiten zukommenden Beträgen an direkter Sonnenstrahlung berechnet werden. Sie stehen in folgender Zusammenstellung an erster Stelle; an zweiter werden zum Vergleich die aus den Beobachtungen ermittelten mittleren Jahrestemperaturen der Breitenkreise¹ angeführt, an dritter der Unterschied beider. Aus diesem ersieht man den bedeutenden Wärmeschutz, den die Atmosphäre der Erde den unteren Luftschichten durch ihre Gegenstrahlung zukommen lässt. Aber hierbei

Tabelle 1.

Breite	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	
Strahlungstemperatur	26.5	25.6	22.1	17.0	9.3	-0.7	-12.9	-24.6	-30.5	-32.4	° C
Mittlere Jahrestemperatur der Breitenkreise	26.3	26.8	25.3	20.4	14.1	5.8	-1.1	-10.7	-17.1	-22.7	° C
Wärmeschutz der Atmosphäre	-0.2	+1.2	+3.2	+3.4	+4.8	+6.5	+11.8	+13.9	+13.4	+10.7	° C

ist vorausgesetzt, dass die Atmosphäre bereits jene hohen Temperaturen besitzt, welche wir beobachten; bei den niedrigen Temperaturen des Strahlungsgleichgewichtes würde auch die Gegenstrahlung und damit der Wärmeschutz nicht vorhanden sein. Der gewaltige Wärmeschutz ist also bereits eine Folge der Temperaturverteilung und hängt mit dieser innig zusammen.

Würden wir in der Atmosphäre mittlerer Breiten bei der jetzt herrschenden Temperaturverteilung die Wärmequelle der ungeordneten Bewegung der Atmosphäre ausschalten können und die Luftmassen nur der Wirkung der Sonnenstrahlung und der Ausstrahlung aussetzen, so würde — dies haben uns Emden und Hergesell gezeigt — jede Schichte der Troposphäre sich durch Ausstrahlung gegen die benachbarten und den Weltenraum abkühlen. Diese Abkühlung würde fort dauern bis für jede Schichte zwischen Ein- und Ausstrahlung das Gleichgewicht herrscht, bis die Strahlungstemperaturen erreicht sind. Nach welchem Gesetze diese Abkühlung, die in den unteren und mittleren Luftschichten natürlich am raschesten vor sich gehen wird, erfolgt, wissen wir nicht, aber wir werden uns nicht sehr irren, wenn wir, wenigstens für das erste Abkühlungsstadium — und nur auf dieses kommt es uns an — annehmen, dass die Abkühlung nach einer ϵ -Potenz erfolgt, dass also, analog der Abkühlung der untersten Luftschichten

¹ v. Hann: Lehrbuch der Meteorologie III. Aufl., S. 141.

während der Nacht, die Abkühlungsgeschwindigkeit gegeben ist durch eine Gleichung der Form

$$1.) \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -\lambda(s-s_0)$$

s ist die herrschende Temperatur, s_0 die schliessliche Endtemperatur, die Strahlungstemperatur und λ der sogenannte Ausstrahlungskoeffizient. Dieser Ausstrahlungskoeffizient ist nicht etwa identisch mit jenem aus dem nächtlichen Temperaturgang ermittelten; denn die Abkühlung der untersten, bodennahen, tagsüber über die normalen Werte erwärmten Luftschichten erfolgt gewiss wesentlich rascher als die allgemeine Abkühlung in der freien Atmosphäre. Dieser Abkühlungskoeffizient hat auch nichts mit jenem zu tun, den F. M. Exner¹ aus der Abkühlung bzw. Erwärmung bewegter Luft über den kälteren bzw. wärmeren Erdboden abgeleitet hat, der also aus dem Wärmeaustausch zwischen Erde und bewegter Luft folgt und der bekanntlich die Grössenordnung von $2 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ hat. Die Grösse λ ist ein Koeffizient, der anzeigt, mit welcher Geschwindigkeit eine nicht im Strahlungsgleichgewicht befindliche Atmosphäre sich diesem Strahlungsgleichgewichte nähert. Wir wissen darüber nicht viel; das λ wird auch für die einzelnen Schichten vielleicht nicht überall gleich gross sein; doch die Abkühlungswerte, die Emden theoretisch und Hergesell an einer tatsächlichen Temperaturverteilung abgeleitet haben, gestatten wenigstens die Grössenordnung von λ zu ermitteln.

Nach Emden² benötigt die unterste Schichte von 1 km Höhenstreckung einer isothermen Atmosphäre bei einer Temperatur von 0° C zur Abkühlung im Mittel um 1° C rund 7 Stunden; pro Stunde beträgt die Abkühlung demnach rund 0.15° C . Die Abkühlung bei einer mittleren Temperaturabnahme, wie sie den Beobachtungen entspricht, ist grösser. Hergesell hat auf Grund der Lindenberger Aufstiege gefunden, dass im Mittel für die unteren Luftschichten bis etwa 4 km Höhe die Abkühlung der Atmosphäre in einer Stunde rund 0.2° C beträgt.

$\frac{\partial s}{\partial t}$ ist also für mittlere Breiten $-0.2^\circ \text{ C/Stunde}$ oder $-0.555 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ \text{ C/sec}$.

Nehmen wir als mittlere Temperatur der Luftschichte bis etwa 4000 m rund 0° C , für s_0 , die Strahlungstemperatur, etwa -40° C , so wird $0.555 \cdot 10^{-4} = 40 \lambda$ und daraus $\lambda = 1.39 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$. Es ist für die Ermittlung der Grössenordnung von λ ziemlich gleichgiltig, was für spezielle Werte wir für s und s_0 nehmen; in den Grenzen ihrer Wahl sind wir doch beschränkt. *Die Grössenordnung von λ ist $2 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$; sie ist etwa 10mal kleiner, als jene des Erwärmungskoeffizienten von Exner und als jene des Ausstrahlungskoeffizienten, abgeleitet aus der nächtlichen*

¹ Siehe hiezu F. M. Exner: Dynamische Meteorologie, S. 121.

² R. Emden: l. c., Seite 127 u. ff.

Abkühlung der unteren Luftschichten; wir wissen auch, dass die Abkühlung der Luftmassen in der freien Atmosphäre wesentlich langsamer vor sich geht, als die Abkühlungsprozesse in der Nähe der Erdoberfläche.

Aus diesen Erörterungen schliessen wir, dass eine Luftmasse bei reinen Strahlungsprozessen in der freien Atmosphäre in den ersten Stadien der Abkühlung ihre Temperatur s angenähert nach dem Gesetze $\frac{\partial s}{\partial t} = -\lambda(s - s_0)$ ändert, worin λ von der Grössenordnung $2.10^{-6} \text{ sec}^{-1}$ ist. Diese Abkühlung wird ausgeglichen durch die Wärmezufuhr aus niederen Breiten infolge der ungeordneten Bewegung der aussertropischen Zirkulation. Wir sehen zunächst von der Krümmung der Erdoberfläche ab und betrachten eine horizontale, von Süden nach Norden liegende Luftsäule von 1 cm^2 Querschnitt; ihre meridionale Erstreckung sei Δz . Durch den südlichen Querschnitt tritt in dem Zeitelement dt die Wärmemenge $d\mathcal{E} = -\sigma A \frac{\partial s}{\partial z} dt$ ein, durch den nördlichen Querschnitt die Menge $d\mathcal{E}' = d\mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \Delta z$ aus. In der Luftsäule Δz bleibt demnach die Wärmemenge.

$$dS = d\mathcal{E} - d\mathcal{E}' = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \Delta z = \sigma A \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} dt \Delta z.$$

Durch Ausstrahlung verliert nach dem früheren die Luftmasse, deren Masse $\rho \Delta z$ ist, in derselben Zeit die Wärmemenge $dS' = \gamma \rho (s - s_0) \Delta z dt$. Hierin ist γ der Ausstrahlungskoeffizient pro Masseneinheit. Durch beide Prozesse ändert sich die Temperatur der Luftsäule um δs ; die dazu erforderliche Wärmemenge ist $dS'' = \sigma \rho \Delta z \delta s$. Da dies die einzigen in Betracht kommenden Faktoren sind, wird

$$1.) \quad \sigma A \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \Delta z dt - \gamma \rho (s - s_0) \Delta z dt = \sigma \rho \Delta z \delta s$$

sein und die Gleichung für die Temperaturänderung innerhalb der Luftsäule lautet, da $\gamma : \sigma = \lambda$ ist:

$$2.) \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{A}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \lambda (s - s_0).$$

Diese Gleichung erinnert an die Wärmeleitungsgleichung der theoretischen Physik und zwar an die Differentialgleichung für die Wärmebewegung in einem Stabe, wenn die Temperatur der Umgebung s_0 und λ die äussere Leitfähigkeit ist¹. In dieser wird aber s_0 als Konstante betrachtet, während in unserem Problem s_0 , als die Strahlungstemperatur, wesentlich von z also von der Breite abhängig ist.

¹ Siehe H. Weber: Die partiellen Differentialgleichungen, II. Bd., VI. Abschn., § 36, S. 91.

Betrachten wir nun einen stationären Zustand, so ist $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$ und die Bedingungsgleichung hierfür wird

$$3.) \quad \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{\lambda \rho}{A} (s - s_0) = 0.$$

Gleichung 3 gestattet uns, den Einfluss des durch die ungeordnete Bewegung der aussertropischen Zirkulation bedingten Massenaustausches auf die meridionale Temperaturverteilung der unteren Luftschichten zahlenmässig zu beurteilen. Die Grenzbedingungen, unter denen die Gleichung 3 zu integrieren ist, sind, falls wir wie bisher die Krümmung der Erdoberfläche vernachlässigen: erstens dass für $z = 0$, das wir mit 30° Breite zusammenfallen lassen, s einen gegebenen Wert s' annimmt und zweitens, dass am Pole $z = p$ der Wärmestrom unmerklich wird, was der Fall ist, wenn für $z = p$ $\frac{\partial s}{\partial z} = 0$ wird. Für s_0 müssen wir natürlich eine den Strahlungstemperaturen entsprechende Funktion der Breite einsetzen. Die Werte der Tabelle 1 zwischen 30° und 90° Breite lassen sich bis auf geringfügige Unterschiede durch die Formel

$$4.) \quad s_0 = -3.9 + 30.4 \cos 2(\varphi - 7^\circ)$$

darstellen. Für s_0 wählen wir dieser Formel entsprechend eine Funktion $s_0 = C + D \cos 2(\varphi - m) = C + D \cos (a z - 2m)$.

Dann lautet die vollständige Lösung der Differentialgleichung 3 bei konstantem A :

$$5.) \quad s = C + \frac{D}{1 + \frac{A a^2}{\lambda \rho}} \cos (a z - 2m) + M e^{-\sqrt{\frac{\lambda \rho}{A}} z} + N e^{+\sqrt{\frac{\lambda \rho}{A}} z}$$

M und N sind zwei willkürliche Konstante zur Erfüllung der Grenzbedingungen.

Anwendung auf die Erde. Drücken wir die Breite φ im Bogenmass aus, so ist, wenn a der Erdradius ist, $z = a\varphi$ und $a = \frac{2}{a} = 3.14 \cdot 10^{-9}$ in CGS System. Dann ist für $\lambda = 2 \cdot 10^{-6}$ und $\rho = 10^{-3}$ für

$A =$	5.10 ⁷	10 ⁸	5.10 ⁸
$\sqrt{\frac{\lambda \rho}{A}} =$	0.663.10 ⁻⁸	0.448.10 ⁻⁸	0.200.10 ⁻⁸
$\frac{A a^2}{\lambda \rho} =$	0.246	0.493	2.315

und die entsprechenden Gleichungen für die meridionale Temperaturverteilung sind:

$$\begin{aligned}
 A = 0 & \quad s = s_0 = -3.9 + 30.4 \cos 2(\varphi - 7^\circ) \\
 A = 5.10^7 & \quad s = -3.9 + 24.4 \cos 2(\varphi - 7^\circ) + 7.37 e^{-0.663 \cdot 10^{-8} z} + 0.035 e^{0.663 \cdot 10^{-8} z} \\
 & = 10^8 & \quad s = -3.9 + 20.4 \cos 2(\varphi - 7^\circ) + 9.90 e^{-0.448 \cdot 10^{-8} z} + 0.204 e^{0.448 \cdot 10^{-8} z} \\
 & = 5.10^8 & \quad s = -3.9 + 9.2 \cos 2(\varphi - 7^\circ) + 15.86 e^{-0.200 \cdot 10^{-8} z} + 2.04 e^{0.200 \cdot 10^{-8} z}
 \end{aligned}$$

Die numerische Auswertung dieser Gleichungen steht in folgender Tabelle 2. Aus der Gleichung 5 ersieht man sofort, dass der Austausch infolge der ungeordneten Bewegung in der Temperaturverteilung in erster Linie den Koeffizienten D des Kosinugliedes beeinflusst, der die Temperaturabnahme gegen den Pol bedingt. Mit wachsender Grösse des Austausches nimmt der Zahlenwert dieses Koeffizienten ab, was gleichbedeutend ist mit einer geringeren Temperaturabnahme gegen den Pol. Derselbe Effekt wird erzielt wenn der Koeffizient der Ausstrahlung λ kleiner wird, da die Änderung nur vom Verhältnis $A:\lambda$ abhängt. Die Tabelle 2 und ihre graphische Darstellung in *Figur 1* zeigen deutlich, dass durch die *Turbulenz der ausser-tropischen Zirkulation die Temperaturverhältnisse der mittleren und höheren Breiten erhöht werden, dass der Temperaturgegensatz zwischen Äquator und Pol herabgesetzt wird.* Ohne Austausch beträgt der Temperaturunterschied zwischen 30° und dem Pol nahezu 50° C, bei einem Austausch 5.10^7 bzw. 5.10^8 hingegen nur mehr rund 45° , 40° und 21° C. Je grösser der Austausch, je turbulenter die atmosphärische Zirkulation in den gemässigten Breiten der Erde ist, desto wärmer werden die höheren Breiten, desto günstiger sind ihre Temperaturverhältnisse. In *Figur 1* wurde auch die tatsächliche, im Jahresdurchschnitt bestehende, meridionale Temperaturverteilung eingetragen. Wir ersehen, dass die beobachtete Temperaturabnahme gegen den Pol sich gut in die theoretisch ermittelte Temperaturver-

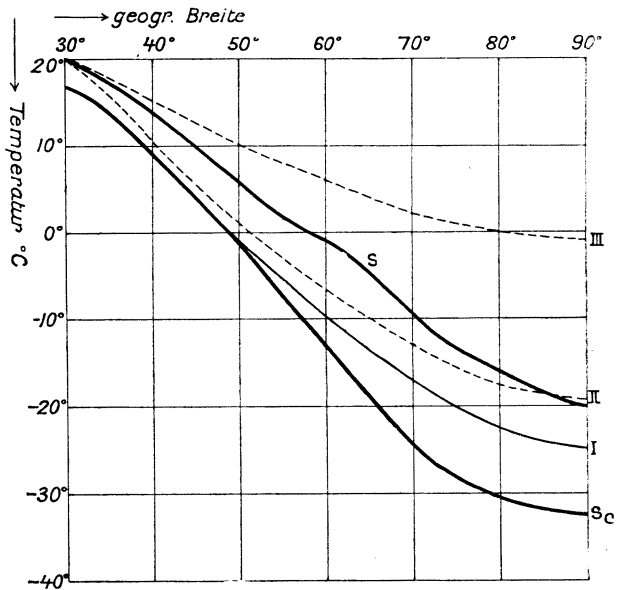


Fig. 1. Meridionale Temperaturverteilung auf der Erde bei verschiedenem Austausch (A)

- s_0 Strahlungstemperaturen
- s beobachtete Temperaturen
- I Temperaturverteilung bei $A = 5.10^7$
- II „ „ „ $A = 10^8$
- III „ „ „ $A = 5.10^8$

gesetzte wird. Ohne Austausch beträgt der Temperaturunterschied zwischen 30° und dem Pol nahezu 50° C, bei einem Austausch 5.10^7 bzw. 5.10^8 hingegen nur mehr rund 45° , 40° und 21° C. Je grösser der Austausch, je turbulenter die atmosphärische Zirkulation in den gemässigten Breiten der Erde ist, desto wärmer werden die höheren Breiten, desto günstiger sind ihre Temperaturverhältnisse. In *Figur 1* wurde auch die tatsächliche, im Jahresdurchschnitt bestehende, meridionale Temperaturverteilung eingetragen. Wir ersehen, dass die beobachtete Temperaturabnahme gegen den Pol sich gut in die theoretisch ermittelte Temperaturver-

teilung einfügt und können nun daraus entnehmen, auf welche Art und in wie weit die Zirkulation der aussertropischen Breiten und die Temperaturverhältnisse der höheren Breiten miteinander zusammenhängen. Bei diesem Vergleich dürfen wir nicht ausser Acht lassen, dass wir für die ganze aussertropische Atmosphäre ein konstantes A angenommen haben, was den tatsächlichen Verhältnissen

Tabelle 2.

Meridionale Temperaturverteilung bei verschiedenem A .

Breite		30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Strahlungstemperaturen..... } s_0 nach Tab. I, Temperaturverteilung bei $A=0$ } nach Formel 4	° C	17.0	9.3	-0.7	-12.0	-24.6	-30.5	-32.4
		17.2	8.5	-1.8	-12.3	-21.7	-29.0	-32.4
Temperaturverteilung für $A = 5 \cdot 10^7$	° C	20.4	9.6	-0.4	-9.5	-17.2	-22.7	-24.7
	„ für $A = 10^8$	20.4	10.7	1.6	-6.4	-13.0	-17.6	-19.2
	„ für $A = 5 \cdot 10^8$	20.4	15.2	9.9	5.8	2.1	-0.1	-0.7
Beobachtete Temperaturverteilung	° C	20.4	14.0	5.6	-0.8	-9.9	-16.5	-20.0

gewiss nicht entspricht. Die Zirkulationsströmungen im Breitenabschnitt zwischen 30° und 40° Breite und jene im Gebiete über 70° haben gewiss nicht jene Turbulenz wie jene in mittleren Breiten. Die Einsetzung eines mittleren Wertes für A kann aber dann für die einzelnen Breiten Abweichungen ergeben, die um so grösser sind, je mehr sich der benützte Mittelwert vom dort geltenden Wert entfernt. Die für $A = 10^8$ berechnete Temperaturverteilung kommt der beobachteten wohl am nächsten. 10^8 war aber auch jener Wert für den Austausch, den wir als den wahrscheinlichsten bezeichnet haben. Schon geringe Schwankungen in der Zirkulation der aussertropischen Breiten können, wie die Tabelle 2 lehrt, schon von merklichem Einflusse auf die Wärmeverteilung der Erde in meridionaler Richtung sein.

Diese für die ungekrümmte Erdoberfläche durchgeführte Rechnung lässt erkennen, dass in der ungeordneten Bewegung der Zirkulation aussertropischer Breiten ein wesentlich mitbestimmender Faktor für die Temperaturverhältnisse der mittleren und höheren Breiten gegeben ist, dessen grosser Einfluss durch die Auffassung dieser Zirkulation als Turbulenzerscheinung zahlenmässig erfasst werden kann. Die Annahme, dass die Erdoberfläche als eben gedacht wird, ist, wenn sie auch eine erste Annäherung darstellt, in unserem Falle, in dem wir Verhältnisse, welche die ganze Erde umfassen, behandeln, doch etwas zu ungenau. Die Konvergenz der Meridiane kann von wesentlichem Einfluss auf den Wärmefluss von Süden nach Norden sein und einzelne der gewonnenen Ergebnisse wieder umstossen. Denn der Wärmefluss kommt, nach Norden vorrückend, immer kleineren Luftmassen zugute, die schliesslich am Pol bis auf die Grössenordnung Null herab-

gehen. Die frühere, für die als eben gedachte Erdoberfläche eingeführte Grenzbedingung, dass am Pol der Wärmefluss auf Null herabsinken muss, hebt zwar die Tragweite dieser Tatsache, welche nur für die gekrümmte Erdoberfläche gilt, zum Teil, jedoch nicht ganz auf. Wir wollen deshalb die Überlegungen für die kugelförmige Erde wiederholen.

Wir betrachten einen Luftring um die Erde, welcher die Höhe eines cm besitzt und sich von der Breite φ bis zur Breite $\varphi + d\varphi$ erstreckt; die Masse dieses Luftringes ist dann, wenn R der Erdradius ist, $2\pi\rho R^2 \cos\varphi d\varphi$. Durch Ausstrahlung im früher definierten Sinne verliert dieser Luftring pro Massenelement die Wärmemenge $\gamma(s - s_0) dt$, insgesamt demnach die Menge $dS' = 2\pi\rho\gamma R^2 \cos\varphi (s - s_0) d\varphi dt$. An der südlichen Grenzfläche des Luftringes tritt in derselben Zeit durch die ungeordnete Bewegung der Zirkulation die Wärmemenge $d\mathfrak{S} = -2\pi\sigma A \cos\varphi \frac{\partial s}{\partial\varphi} dt$ ein, an der nördlichen hingegen die Menge

$d\mathfrak{S}' = d\mathfrak{S} + \frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial\varphi} d\varphi$ aus. Die Wärmemenge, die im Luftringe bleibt, ist also

$dS = -\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial\varphi} d\varphi = 2\pi\sigma \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(A \cos\varphi \frac{\partial s}{\partial\varphi} \right) d\varphi dt$. Hier ist vorausgesetzt, dass auch der Austausch A von der Breite φ abhängen kann, was den allgemeineren Fall darstellt. Der Wärmeunterschied $dS - dS'$ dient zur Erhöhung der Temperatur um ds , wozu die Wärmemenge $2\sigma\pi R^2 \cos\varphi d\varphi ds$ notwendig ist. Es muss demnach, da $\lambda = \gamma : \sigma$ ist, für die Temperaturänderung mit der Zeit die Differentialgleichung 6 gelten.

$$6.) \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\rho R^2 \cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left[A \cos\varphi \frac{\partial s}{\partial\varphi} \right] - \lambda (s - s_0).$$

Im stationären Zustand ist wieder $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$ und die Gleichung 6 nimmt die Form 7 an.

$$7.) \quad \frac{1}{\cos\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left[A \cos\varphi \frac{\partial s}{\partial\varphi} \right] - \lambda\rho R^2 (s - s_0) = 0.$$

Mit dieser Gleichung werden wir uns eingehender zu befassen haben. Aus der Gleichung 7 entnehmen wir zunächst, dass unter bestimmten Verhältnissen auf einer kugelförmigen Erde es zu einer durch die Zirkulation der aussertropischen Breiten bedingten Wärmestauung auch dann noch kommt, wenn die Temperaturgradienten, absolut genommen gegen Norden hin an Grösse zunehmen. Auf der ebenen Erdoberfläche erfolgte in mittleren und höheren Breiten bei konstantem A eine Wärmestauung nur dann, wenn die Temperaturgradienten gegen Norden hin

an Grösse abnehmen; sie verschwindet, wenn die Änderung des Temperaturgefälles Null wird. Auf einer kugelförmigen Erde sind die Verhältnisse anders.

In einer Breite φ_1 ist bei einem Austausch A_1 die durch ein Flächenelement meridional verschobene Wärmemenge $-\sigma A_1 \cos \varphi_1 \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)_1$, in einer Breite φ_2 und bei einem Austausch A_2 ist diese Menge hingegen $-\sigma A_2 \cos \varphi_2 \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)_2$. In der Luftmasse dazwischen bleibt die Wärmemenge

$$\sigma \left[A_2 \cos \varphi_2 \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)_2 - A_1 \cos \varphi_1 \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)_1 \right].$$

Bei gleichem A ist diese Wärmemenge Null, wenn

$$\cos \varphi_2 \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)_2 = \cos \varphi_1 \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)_1 \quad \text{oder wenn} \quad \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)_2 = \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)_1 \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}.$$

Also nicht bei gleich bleibenden Gradienten, wie in der Ebene, sondern wenn der Gradient im Verhältnis des Kosinus der geographischen Breiten absolut genommen zunimmt, verschwindet die Wärmestauung. In der Ebene würde in diesem Falle bereits ein Wärmestrom von Norden gegen Süden erfolgen. Diese Erscheinung ist eine unmittelbare Folge der Konvergenz der Meridiane und für die Verhältnisse auf unserer Erde ein Umstand von ausschlaggebender Bedeutung. Die Wirkung dieser Konvergenz ist nicht gering zu veranschlagen, wenn man sich überzeugt, dass für $\varphi_1 = 30^\circ$ und $\varphi_2 = 60^\circ$ das Verhältnis der Kosinus gleich 1.73 ist. Wenn die Zunahme der Temperaturgradienten mit der Breite kleiner als dieser Betrag ist, erfolgt bereits eine Wärmestauung und als Folge des Austausches eine Temperaturerhöhung; wird diese Grösse überschritten, so kehren sich die Verhältnisse erst um, der Wärmestrom fliesst von Norden nach Süden. Betrüge z. B. das Temperaturgefälle pro 10° Breitenunterschied zwischen 30° und 40° Breite 6.4° C, zwischen 60° und 70° Breite 9.0° C, Werte, die den auf der Erdoberfläche vollkommen entsprechen, so ist das Verhältnis $\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)_2 : \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)_1 = 1.41$, kleiner als das Verhältnis $\cos 35^\circ : \cos 65^\circ$, das gleich 1.93 ist. *Auf der Erde erfolgt also auch bei einer ziemlich beträchtlichen Zunahme des Temperaturgefälles nach Norden hin eine Wärmestauung in mittleren und höheren Breiten, welche zu ihrer Temperaturerhöhung dient, wenn nur diese Zunahme kleiner ist als die Zunahme der Verhältnisse der entsprechenden Kosinus der geographischen Breite.*

Bei mit der Breite veränderlichem Austausch können die Verhältnisse noch komplizierter sein; denn schon auf einer ebenen Erdoberfläche würde auch bei zunehmenden Temperaturgradienten die Wärmestauung verschwinden, wenn gleichzeitig der Austausch im gleichen Verhältnisse abnimmt.

Wir nehmen nun auf der Erde bei konstantem Austausch A stationäre Verhältnisse an; dann tritt an Stelle von Gleichung 7 die Differentialgleichung

$$8.) \quad \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\cos \varphi \frac{\partial s}{\partial \varphi} \right] - \beta^2 (s - s_0) = 0, \quad \text{worin } \beta^2 = \frac{\lambda \rho R^2}{A} \text{ ist.}$$

Wir suchen wieder eine Lösung dieser Differentialgleichung unter der Voraussetzung, dass die Strahlungstemperaturen s_0 durch einen Ausdruck $s_0 = C + D \cos 2 \varphi$ gegeben sind,¹ und unter der Grenzbedingung, dass bei einem gegebenen φ die Temperatur einen vorgegebenen Wert $s = s_1$ annimmt. Die zweite Grenzbedingung entfällt bei Betrachtungen der Erde als Kugel, da $\cos \varphi$ bei $\varphi = 90^\circ$ Null ist.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung 8 enthält, als nicht homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, neben der direkten Lösung mit bestimmten Koeffizienten noch die partikulären Integrale der entsprechenden homogenen Differentialgleichung

$$9.) \quad \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\cos \varphi \frac{\partial s}{\partial \varphi} \right] - \beta^2 s = 0$$

mit zwei willkürlichen Konstanten zur Erfüllung der Grenzbedingungen.

Wir müssen uns also zunächst mit der Differentialgleichung 9 befassen. Setzen wir in dieser $\varphi = 90^\circ - \vartheta$, worin ϑ die Poldistanz bedeutet und $\beta^2 = \frac{\lambda \rho R^2}{A} = \mu^2 + \frac{1}{4}$ so erhält sie die Form

$$10.) \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{\partial s}{\partial \vartheta} \right] - \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) s = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser, der Differentialgleichung der Kugelfunktionen ähnlichen Differentialgleichung lautet, wenn M und N willkürliche Konstante bedeuten:

$$11.) \quad s = M K_\mu(\cos \vartheta) + N L_\mu(\cos \vartheta).$$

Hierin bedeuten $K_\mu(\cos \vartheta)$ und $L_\mu(\cos \vartheta)$ die *Mehler'schen Kegelfunktionen*¹, die bekanntlich Kugelfunktionen mit imaginären Koeffizienten darstellen. Eine sich durch grössere Einfachheit auszeichnende, für unsere späteren Rechnungen praktische Reihenentwicklung der ersten Mehler'schen Kegelfunktion ist:

$$12.) \quad K_\mu(\cos \vartheta) = 1 + \frac{4\mu^2 + 1^2}{2.2} \sin^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right) + \frac{(4\mu^2 + 1^2)(4\mu^2 + 3^2)}{2.2 \cdot 4.4} \sin^4 \left(\frac{\vartheta}{2} \right) + \\ + \frac{(4\mu^2 + 1^2)(4\mu^2 + 3^2)(4\mu^2 + 5^2)}{2.2 \cdot 4.4 \cdot 6.6} \sin^6 \left(\frac{\vartheta}{2} \right) + \dots$$

¹ Wir vernachlässigen in Gleichung 4, die geringe Phasenverschiebung von γ° .

² Siehe näheres über diese wenig bekannte Funktion: Math. Annalen XVIII. Band. Leipzig 1881, S. 161 u. 196.

Aus dieser Entwicklung wird eine für $L_\mu(\cos \vartheta)$ gewonnen, wenn man an Stelle von ϑ $\pi - \vartheta$ setzt, wodurch K_μ in $K_\mu(-\cos \vartheta) = L_\mu(\cos \vartheta)$ übergeht. Aus 12 ersieht man, dass die Kegelfunktion K_μ für den Pol ($\vartheta = 0$) endlich und gleich 1 ist, am Äquator ($\vartheta = 90^\circ$) unendlich wird; die Kegelfunktion L_μ wird hingegen am Äquator 1 und am Pol unendlich. Für unsere Betrachtungen, die sich auf das Gebiet zwischen 30° Breite und Pol beschränken, wird also die zweite *Mehler'sche Kegelfunktion* L_μ keine Verwendung finden können; wir benötigen sie aber auch nicht, da wir im ganzen nur eine Grenzbedingung zu erfüllen haben; in unserem Problem ist also N stets gleich Null.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung 8 ist nun bei $s_0 = C + D \cos 2\varphi$

$$13.) \quad s = C + \frac{2D}{6 + \beta^2} + \frac{\beta^2 D}{6 + \beta^2} \cos 2\varphi + MK_\mu(\sin \varphi),$$

worin $\beta^2 = \mu^2 + \frac{1}{4} = \frac{\lambda \rho R^2}{A}$ und M eine zur Erfüllung der Grenzbedingung freie Konstante ist. Die meridionale Temperaturverteilung richtet sich auf der Erdoberfläche bei konstantem A nach dieser Gleichung. Gegenüber der Lösung 5 auf einer eben gedachten Erdoberfläche besteht der Unterschied zunächst darin, dass nun durch den Austausch auch das konstante Glied in der Gleichung für s_0 eine Änderung erfährt, die von A und λ abhängt. Die Beeinflussung der Konstante D durch den Austausch ist auch wesentlich anderer und empfindlicherer Art als in der Lösung 5.

Diesen Einfluss der Turbulenz der atmosphärischen Zirkulation auf die meridionalen Temperaturverteilungen auf unserer Erdoberfläche können wir am besten an zahlenmässigen Beispielen beurteilen. Wir wollen jene Verteilungen berechnen, denen $\mu^2 = 4, 8$ und 16 entspricht; für diese sind die benötigten Zahlenwerte der Kegelfunktion $K_\mu(\cos \vartheta)$, welche nach der Reihenentwicklung 12 bis zum 14. Gliede berechnet wurden, in folgender Tabelle 3 zusammengestellt:

Tabelle 3.

Zahlenwerte der Mehler'schen Kegelfunktion $K_\mu(\cos \vartheta)$ für				
Poldistanz ϑ	Breite φ	$\mu^2 = 4$	$\mu^2 = 8$	$\mu^2 = 16$
0°	90°	1,000	1,000	1,000
10	80	1,033	1,064	1,126
20	70	1,134	1,269	1,547
30	60	1,317	1,659	2,397
40	50	1,602	2,317	3,979
50	40	2,023	3,392	6,908
60	30°	2,633	5,132	12,419

Setzt man, den Strahlungstemperaturen entsprechend, $s_0 = -3.9 + 30.4 \cos 2\varphi$ also $C = -3.9$ und $D = 30.4$ und die Grenzbedingung, dass für $\varphi = 30^\circ$ $s = 20.4$, dem mittleren Temperaturwerte des 30sten Breitenkreises, so nimmt die meridionale Temperaturverteilung für die verschiedenen Werte von A bei $\lambda = 2.10^{-6}$ folgende in Tabelle 4 enthaltenen Werte an.

Tabelle 4.

Meridionale Temperaturverteilung auf der Erde bei verschiedenem Austausch A .

Breite		30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Strahlungstemperaturen	° C	17.0	9.3	-0.7	-12.9	-24.6	-30.5	-32.4
Temperaturverteilung für $\lambda = 2.10^{-6}$ und $\mu^2 = 16$ oder $A = 4.92.10^7$..	° C	20.4	8.5	-1.8	-10.4	-16.9	-21.2	-22.7
$\mu^2 = 8$ „ $A = 0.97.10^8$..		20.4	10.9	2.5	-4.6	-10.2	-13.6	-14.9
$\mu^2 = 4$ „ $A = 1.88.10^8$..		20.4	13.5	7.2	1.8	-2.1	-5.0	-6.0
Beobachtete Temperaturverteilung	° C	20.4	14.0	5.6	-0.8	-9.9	-16.5	-20.0

Wieder sehen wir, dass die mittleren und höheren Breiten analog dem früher behandelten Falle, durch die Turbulenz der aussertropischen Zirkulation eine wesentliche Temperaturerhöhung gegenüber den Strahlungstemperaturen aufweisen und dass diese Temperaturerhöhung um so grösser ausfällt, je grösser die Turbulenz der Zirkulation ist. Figur 2 gibt die entsprechende graphische Darstellung der Werte der Tabelle 4, und der Vergleich mit der beobachteten mittleren Temperatur der Breitenkreise lehrt wieder, dass im allgemeinen Durchschnitte die mittlere Kurve II, die einem Austauschwerte $A = 0.97.10^8$ entspricht, der beobachteten Verteilung s am nächsten kommt; in niederen Breiten gibt Kurve II zu niedrige,

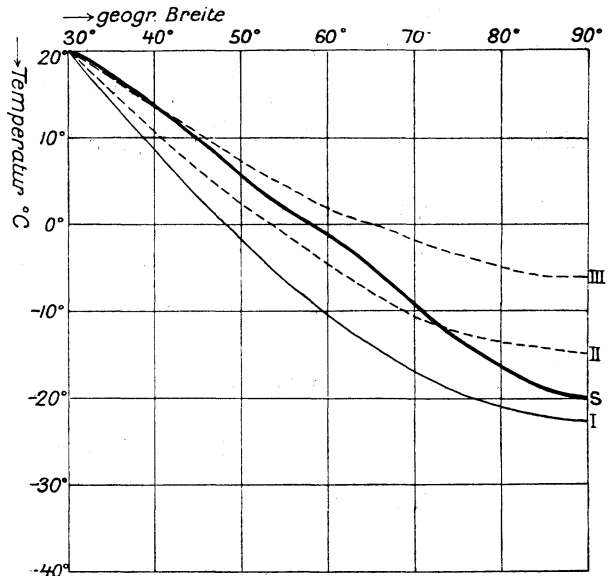


Fig. 2. Meridionale Temperaturverteilung auf der Erde bei verschiedenem Austausch (A).

- s mittlere Temperaturverteilung nach den Beobachtungen
- I Temperaturverteilung bei $A = 4.92.10^7$
- II „ „ $A = 0.97.10^8$
- III „ „ $A = 1.88.10^8$

in höheren zu hohe Werte für die Temperatur. Dies würde besagen, dass der Austausch in Wirklichkeit auf der Erde in mittleren Breiten, etwa zwischen 45° und 65° Breite etwas über dem Werte 10^8 liegt, und in höheren Breiten, über 65° bis zum Pol gewiss unter dem Werte 10^8 liegt. Diese Verteilung von \mathcal{A} fügt sich aber ausgezeichnet in unsere sonstigen Kenntnisse über die Turbulenzstärke der aussertropischen Zirkulation. Schon aus diesem Ergebnis sind wir berechtigt zu schliessen, dass die ausserordentliche Begünstigung, welche die mittleren und höheren Breiten der Erde in bezug auf ihre Temperaturverhältnisse aufweisen, in erster Linie ein Effekt der ungeordneten Bewegung der Zirkulation der Atmosphäre aussertropischen Breiten ist, die es ermöglicht, dass enorme Wärmemengen von den äquatorialen Gebieten der Erde gegen Norden hin verschoben und so den höheren Breiten zugute kommen.

Nichts hindert uns aber noch genauer den Einfluss der Veränderlichkeit des Austausches mit der geographischen Breite in Rechnung zu ziehen, wenn wir uns entschliessen *schnittweise* die meridionale Temperaturverteilung auf der Erdoberfläche zu berechnen. Die zu dieser schnittweisen Berechnung benützten Überlegungen und Gleichungen sind kurz folgende:

Das Stück Erdoberfläche, das von den zwei Breitenkreisen φ_1 und φ_2 und den zwei Längenkreisen, die am Äquator um die Länge C von einander abstehen, begrenzt wird, hat, falls φ_1 und φ_2 wenig von einander verschieden sind und C klein ist, den Flächeninhalt $\frac{C}{2} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) (\varphi_2 - \varphi_1) \text{ I. II. } 10^7 \text{ cm}^2$. Die Luftsäule darüber, von 1 cm Höhe, hat die Masse $\frac{\rho C}{2} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) (\varphi_2 - \varphi_1) \text{ I. II. } 10^7 \text{ g}$. Die mittlere Temperatur am Breitenkreis φ_1 sei s_1 , der Temperaturgradient dort selbst $\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)_1$. Die entsprechenden Werte am Breitenkreis φ_2 hingegen s_2 und $\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)_2$. Wenn sich das Temperaturgefälle nur wenig ändert und $\varphi_2 - \varphi_1$ klein ist, so ist mit genügender Genauigkeit $s_2 = s_1 + \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)_1 (\varphi_2 - \varphi_1) \text{ I. II. } 10^7$ und die mittlere Temperatur der ganzen Luftsäule

$$s = \frac{s_1 + s_2}{2} = s_1 + \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)_1 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \text{ I. II. } 10^7.$$

Die von der ganzen Luftsäule ausgestrahlte Wärmemenge ist $\gamma (s - s_0)$. Masse =

$$\frac{\gamma \rho C}{2} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) (\varphi_2 - \varphi_1) \text{ I. II. } 10^7 \left[s_1 + \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)_1 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \text{ I. II. } 10^7 - s_0 \right].$$

Die infolge der ungeordneten Bewegung der aussertropischen Zirkulation an der südlichen Begrenzung einströmende Wärmemenge ist $\mathfrak{E}_1 = -\sigma AC \cos \varphi_1 \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi} \right)_1$, die an der nördlichen ausströmende $\mathfrak{E}_2 = -\sigma AC \cos \varphi_2 \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi} \right)_2$. In der Luftsäule bleibt demnach

$$\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2 = \sigma AC \left[\cos \varphi_2 \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi} \right)_2 - \cos \varphi_1 \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi} \right)_1 \right].$$

Wir setzen nun $\varphi_2 = \varphi_1 + 5^\circ$, so wird in erster Annäherung

$$\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2 = \sigma AC \left[\left\{ \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi} \right)_2 - \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi} \right)_1 \right\} \cos \varphi_1 - \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi} \right)_2 \cdot 0.087 \sin \varphi_1 \right].$$

Im stationären Zustand sind zugeführte und ausgestrahlte Wärmemenge einander gleich und daraus folgt die Beziehung 14.

$$\begin{aligned} 14.) \\ \left[\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi} \right)_2 - \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi} \right)_1 \right] \cos \varphi_1 = \frac{\lambda \rho}{A} 5.56 \cdot 0.996 \cdot 10^7 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \left[s_1 - s_0 + \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi} \right)_1 2.78 \cdot 10^7 \right] + \\ + \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi} \right)_1 \cdot 0.087 \sin \varphi_1. \end{aligned}$$

In dieser Beziehung stehen rechts nur Grössen, die sich auf den Breitenkreis φ_1 beziehen, und die wir sämtliche als bekannt voraussetzen; links steht die Differenz der Temperaturgefälle zwischen der nördlichen und südlichen Begrenzung der Luftsäule; wir können somit das Temperaturgefälle am nördlichen Ende der Luftsäule berechnen und damit auch die Temperatur dortselbst. Mittels der Gleichung 14 kann man somit von 30° Breite, wo Temperatur und Temperaturgradient nach den Beobachtungen als bekannt vorausgesetzt werden, ausgehend, schnittweise für je 5° Breite die Änderung des Temperaturgradienten und damit die meridionale Temperaturverteilung berechnen, wobei für jeden Schritt sowohl die Grösse des Austausches A als auch der Ausstrahlungskoeffizient λ als konstant angesehen werden, bei jedem Schnitt aber zahlenmässig verschieden gross angesetzt werden können. Als Ausgangswerte für 30° Breite wurde den Beobachtungen gemäss gewählt:

$$s_1 = 20.3^\circ C \text{ und } \left(\frac{\partial s}{\partial \varphi} \right)_1 = 6.3^\circ \text{ für } 10^\circ \text{ Breite} = 5 \cdot 7 \cdot 10^{-8} C/cm.$$

Das Ergebnis der schnittweisen Berechnung, sowie die jeweils hiezu angenom-

menen Werte von A und λ stehen in folgender Tabelle 5; die graphische Darstellung davon steht in *Figur 3*.

Neben der berechneten Temperaturverteilung steht die beobachtete, sowie der Unterschied zwischen beiden.

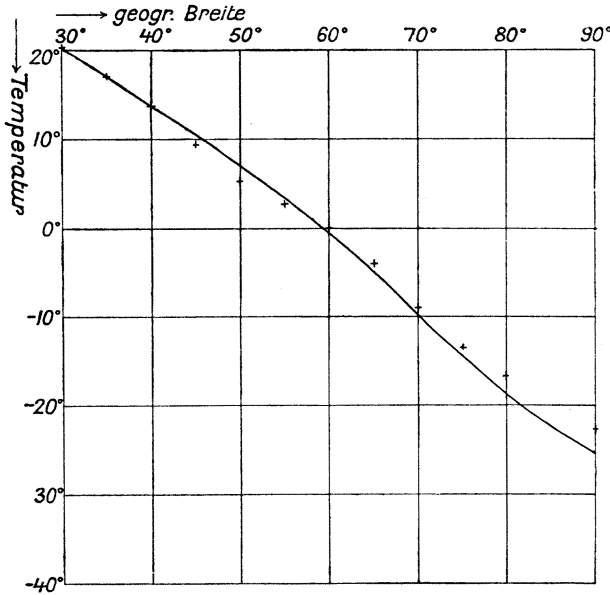


Fig. 3. — meridionale Temperaturverteilung bei mit der Breite variablen Austausch (A).
 + + + + beobachtete Temperaturverteilung.

Man entnimmt aus beiden, dass bei ganz plausiblen Annahmen über die Grössenverteilung von A und λ die beobachtete, meridionale Temperaturverteilung auf der Erdoberfläche ohne weiteres erklärt werden kann. Die Übereinstimmung hätte natürlich noch viel weiter getrieben werden können. Wir geben uns hier in Anbetracht, dass wir nur die Verhältnisse der untersten Luftschichten betrachten können und wir von A und λ nur die Grössenordnung kennen, damit zufrieden. Die zur Gewinnung dieser Übereinstimmung notwendige Grössenverteilung der Austauschgrösse A ist in den

Tabelle 5.

Meridionale Temperaturverteilung bei schrittweiser Berechnung des Temperaturgefälles und mit der Breite veränderlichem Austausche.

Angenommene Werte von				Temperaturen ° C			
Breite	$\frac{\lambda \rho}{A}$	A	λ	berechnet	beobachtet		Unterschied
					nach Spitaler	nach Hann	
30°		$1 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{-6}$	20,3	20,3	20,4	0,0
35	$2 \cdot 10^{-17}$	$2 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{-6}$	17,1	17,1		0,0
40	$1 \cdot 10^{-17}$	$5 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{-6}$	14,0	14,0	14,1	0,0
45	$0 \cdot 4 \cdot 10^{-17}$	$5 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{-6}$	10,7	9,6		- 1,1
50	$0 \cdot 4 \cdot 10^{-17}$	$5 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{-6}$	7,2	5,6	5,8	- 1,6
55	$0 \cdot 4 \cdot 10^{-17}$	$5 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{-6}$	3,5	2,3		- 1,3
60	$0 \cdot 4 \cdot 10^{-17}$	$5 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 0,5	- 0,8	- 1,1	- 0,3
65	$0 \cdot 4 \cdot 10^{-17}$	$5 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 4,9	- 4,3		- 0,6
70	$0 \cdot 4 \cdot 10^{-17}$	$2 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{-6}$	- 9,8	- 9,9	- 10,7	- 0,1
75	$1 \cdot 10^{-17}$	$5 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^{-6}$	- 14,7	- 13,3		+ 1,4
80	$8 \cdot 10^{-17}$	$3 \cdot 6 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^{-6}$	- 18,8	- 16,5	- 17,1	+ 2,3
85	$11 \cdot 10^{-17}$	$1 \cdot 7 \cdot 10^7$	$6 \cdot 10^{-6}$	- 22,6	—		—
90°	$36 \cdot 10^{-17}$			- 25,6	- 20,0	- 22,7	+ 5,6

Beobachtungen über die Turbulenz der aussertropischen Zirkulation sehr gut begründet. Die mittleren Breiten zwischen 40° und 60° Breite zeigen die häufigsten und grössten unperiodischen Druckänderungen, die grösste Instabilität der Luftströmungen, also auch die grössten Werte von A . Sowohl gegen die Subtropen und stärker noch gegen den Pol hin nimmt die Austauschgrösse ab, gemäss der Tatsache, dass die Häufigkeit der Zyklonen sowohl in den Subtropen, wie in den höchsten Breiten klein ist. Im Durchschnitt für alle aussertropischen Breiten findet man $A = 3 \cdot 10^8$, in guter Übereinstimmung mit der bisher angenommenen Grössenordnung von A . Von etwa 70° Breite an nimmt auch der Zahlenwert von λ etwas zu. Auch dies lässt sich aus den Beobachtungen ohne weiteres erklären; denn je geringer der Wasserdampfgehalt der Atmosphäre ist, desto rascher wird die Abkühlung der unteren Luftschichten, desto rascher die Annäherung an die schliesslichen Strahlungstemperaturen sein, desto grösser ist aber dann auch der Wert von λ . Die Änderungen dieses Koeffizienten scheinen aber nicht von so ausschlaggebender Bedeutung zu sein, wie jene des Austausches A .

Aus den Überlegungen und Berechnungen dieses Abschnittes können wir zwei Tatsachen entnehmen, die von grosser Bedeutung für die Meteorologie der gemässigten und höheren Breiten der Erde sind. Erstens erkennen wir welche Bedeutung der ungeordneten Zirkulation der Atmosphäre aussertropischer Breiten für die Wärmeverhältnisse dieser Breiten zukommt; wir können nun angeben, auf welche Art dieser Wärmetransport von den äquatorialen Gebieten gegen die polaren vor sich geht, wir können auch die verschobene Wärmemenge, die vor allem zur Erhöhung der Strahlungstemperaturen auf die beobachteten Werte dient, zahlenmässig angeben. Allerdings konnten wir nicht in die Details dieser Wärmetransporte eindringen, den Weg angeben, welchen jeder einzelne derselben nimmt, aber wir konnten den schliesslichen Effekt dieser Wärmeverschiebungen durch die Anwendung der Gesetze über den Massenaustausch bei einer stationären ungeordneten Bewegung der Atmosphäre überblicken und in Rechnung stellen. Auf diese Art sind wir in der Beurteilung des Wärmehaushaltes der gemässigten und höheren Breiten und ihrer Temperaturverhältnisse um ein gutes Stück weitergekommen.

In zweiter Linie haben die Berechnungen dieses Abschnittes einen neuen guten Anhalt über die Grössenordnung des Austausches der turbulenten Zirkulation der aussertropischen Breiten gegeben. Die Grössenverteilung des Austausches dieser ungeordneten Bewegung auf der Erdoberfläche ergab sich als völlig übereinstimmend mit den aus anderen Überlegungen abgeleiteten. Die mittleren Breiten, die Gebiete zwischen 45° und 65° Breite haben die grösste Turbulenz; auf beiden Seiten derselben nimmt ihre Stärke ab. In diesen Teilen der Erde erfolgen in der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre in erster Linie die grössten atmosphärischen Verschiebungen, durch welche die in den niederen

Breiten mit grossen Entropiemengen beladenen, strahlungsfähigen Luftmassen in höhere Breiten gebracht werden und hier zu Temperaturen der Atmosphäre Veranlassung geben, die sich ihren ursprünglichen Strahlungsverhältnissen allein nach nicht erhalten könnten.

So wird die allgemeine Zirkulation der aussertropischen Breiten zu einem der wichtigsten Faktoren für die Witterungsverhältnisse der höheren Breiten und gerade ihre „Störungen“, ihre Turbulenzerscheinungen sind hiebei das Wichtigste; sie bilden wirklich einen integrierenden Bestandteil der allgemeinen Zirkulation und in die Gesetze ihrer Bildung und Fortpflanzung können wir gewiss nur eindringen, wenn wir sie als einen solchen Bestandteil der allgemeinen Zirkulation betrachten.

6. Klimaschwankungen bei konstantem Austausch.

Bei den bisherigen Überlegungen sind wir von der Erfahrungstatsache ausgegangen, dass im allgemeinen Durchschnitte die Temperatur- und Luftdruckverhältnisse der Erde einen stationären Zustand darstellen. Die vorkommenden Abweichungen sind gering und heben sich zum grossen Teil gegenseitig auf, wenn man entsprechend lange Zeiträume betrachtet. Trotz dieser allgemein anerkannten Tatsache ist es jetzt bekannt, dass die meteorologischen Elemente vieler Stationen der Erdoberfläche kurz- oder langperiodischen Änderungen unterliegen, Änderungen, die Hand in Hand mit Witterungs- und Klimaänderungen ganzer Teile der Erdoberfläche gehen und die man meistens mit dem Worte „Klimaschwankungen“ zusammenfasst. Über die Ursache besonders der länger dauernden Klimaschwankungen, die stets einen mehr oder minder periodischen Charakter aufweisen, ist man noch völlig im unklaren. Man hat sie ebensooft Schwankungen der Solarkonstante, also ausserterrestrischen Erscheinungen, als Schwankungen in der optischen Durchlässigkeit der Erdatmosphäre, also Erscheinungen innerhalb der Lufthülle der Erde zugeschrieben. Man konnte jedoch nicht nachweisen, wie diese oder jene Ursache imstande ist, die Änderungen der meteorologischen Elemente für grosse Teile der Erde einheitlich hervorzurufen und zu regeln.

Es ist nicht zu leugnen, dass eine grosse Zahl von lang dauernden Änderungen der meteorologischen Elemente in den gemässigten und höheren Breiten der Erde gewiss terrestrischen Ursprungs sind und dadurch hervorgerufen werden, dass die an einzelnen Teilen der Erde irgendwie geänderten atmosphärischen Zustände nun wieder auch an anderen Teilen der Erdoberfläche Änderungen

der meteorologischen Elemente mitbedingen oder zur Folge haben. Diese Änderungen sind dann eine Folge des gestörten Gleichgewichtszustandes der im allgemeinen Durchschnitt in der Atmosphäre der Erde besteht. Wird dieser Zustand irgendwie gestört, so stellt sich ein neuer, den geänderten Verhältnissen entsprechender Gleichgewichtszustand ein. Zu diesen Änderungen gehören die Klimaschwankungen, die bei ungeändertem Austausch der ungeordneten Bewegung der aussertropischen Zirkulation vor sich gehen und die wir im folgenden Abschnitt besprechen wollen.

Wir stellen uns folgendes Problem: Auf der Erdoberfläche besteht bei einem konstanten Austausch A und einer bestimmten meridionalen Temperaturverteilung s_1 stationärer Wärmezustand. In den Tropen und Subtropen erfolgt durch irgendwelche Ursache eine rasche Temperaturerhöhung um einen bestimmten Betrag über den normalen Wert. Wir fragen: wie ändert sich die meridionale Temperaturverteilung in den mittleren und höheren Breiten? wie lange dauert, wenn die Temperaturerhöhung anhält, bis wieder ein den neuen Verhältnissen entsprechender, stationärer Gleichgewichtszustand eintritt? *Breiten sich äquatoriale Klimaschwankungen über die ganze Erde aus und wie geschieht diese Fortpflanzung?*

Ich will sofort erwähnen, dass die Lösung dieses Problems nur für eine eben gedachte Erdoberfläche gelungen ist, während die mathematischen Schwierigkeiten, die sich bei einer kugelförmigen Erdoberfläche einstellen, so gross sind, dass zunächst an eine Lösung in dieser Allgemeinheit nicht gedacht werden kann. Wir sind uns bewusst, dass die Lösung für eine ebene Erdoberfläche nur mit gewissen Beschränkungen für die tatsächliche Erdoberfläche benützt werden kann; trotzdem wollen wir hier die Rechnung mitteilen.

Die Grundgleichung, von der wir ausgehen, ist die Differentialgleichung für die zeitliche Änderung der meridionalen Temperaturgleichung, die auf Seite 27 in Gleichung 2 gegeben ist. Sie lautet:

$$1.) \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{A}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \lambda (s - s_0).$$

s_0 ist als eine Funktion von z gegeben, A ist konstant. Die mathematische Formulierung des Problems ist nun folgende: Für $t = 0$ und $z > 0$ herrscht stationärer Wärmezustand $s = s_1$; unter dieser Bedingung erfüllt s_1 die Gleichung des stationären Gleichgewichtes

$$\frac{A}{\rho} \frac{\partial^2 s_1}{\partial z^2} - \lambda (s_1 - s_0) = 0.$$

Für $t > 0$ und $z = 0$ ist $s = s_2 = a + u_0$, worin a der Wert von s_1 für $z = 0$ ist. In der Breite $z = 0$ wird also die Temperatur plötzlich um den Wert u_0 erhöht

und auf diesen Wert erhalten. Die Temperaturänderung in den höheren Breiten erfolgt sodann nach der Gleichung 1.

Wir setzen hierin $s = s_1 + ue^{-\lambda t}$. Dann reduziert¹ sich die Gleichung 1, auf die einfachere Gleichung

$$2.) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{A}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2},$$

wobei die Grenzbedingungen nun folgende sind:

$$3.) \quad \begin{array}{l} \text{für } t = 0 \text{ muss bei } s > 0 \text{ } u = 0 \text{ sein und} \\ \text{für } s = 0 \quad \text{und} \quad t > 0 \text{ } u = u_0 e^{-\lambda t}. \end{array}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung 2 unter den Grenzbedingungen 3 ist in der Theorie der Wärmeleitung bereits gegeben. Siehe hierüber H. Weber: Die partiellen Differentialgleichungen § 40 und 41, Formel 2 auf Seite 106. Die Lösung ist folgende:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{s}{2\sqrt{\frac{At}{\rho}}}} e^{-\lambda \left(t - \frac{s^2}{4\frac{A}{\rho}a^2} \right) - a^2} da = \\ &= e^{-\frac{\rho\lambda s^2}{4Aa^2} - a^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{s}{2\sqrt{\frac{\rho}{At}}}} e^{-\lambda \left(t - \frac{s^2}{4\frac{A}{\rho}a^2} \right) - a^2} da. \end{aligned}$$

Aus ihr folgt die Lösung der Differentialgleichung 1 unter den festgelegten Bedingungen in der Form:

$$4.) \quad s = \text{stationärer Zustand } (s_1) + \\ + u_0 e^{-\sqrt{\frac{\rho\lambda}{A}} s} \left[1 - e^{-\sqrt{\frac{\rho\lambda}{A}} s} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{s}{2\sqrt{\frac{\rho}{At}}}} e^{-\lambda \left(t - \frac{s^2}{4\frac{A}{\rho}a^2} - a^2 \right)} da \right]$$

¹ Die Reduktion der Gleichung 1 auf die Gleichung 2 mittels der erwähnten Substitution gilt ganz allgemein, nicht bloß bei konstantem s_1 , wie sie bisher allgemein benützt wurde, sondern stets auch wenn s_1 irgend ein stationärer Zustand ist, der die entsprechende Bedingungsgleichung erfüllt. In allen folgenden Anwendungen wurde von ihr Gebrauch gemacht.

Die Lösung erfüllt die gestellten Bedingungen vollständig¹. Der neue stationäre Zustand, der theoretisch nach unendlich langer Zeit, praktisch jedoch wesentlich früher eintritt, ist gegeben durch

$$5.) \quad s_3 = s_1 + u_0 e^{-\sqrt{\frac{\rho \lambda}{A}} \varepsilon}$$

Die Gleichung 4 lehrt, dass die äquatoriale Gleichgewichtsstörung sich von den Subtropen aus allmählich gegen die mittleren und höheren Breiten ausbreitet und schliesslich einem neuen stationären Zustand zustrebt. Die subtropische Störung im Betrage u_0 pflanzt sich jedoch nicht mit gleichbleibender Intensität gegen die höheren Breiten aus, sondern die Intensität der Störung nimmt rasch ab und zwar nach der in Gleichung 5 stehenden e -Potenz. Diese Abnahme hängt wieder vom Verhältniss $A : \lambda$ ab, also wesentlich von der Grösse des Austausches, von der Stärke der Turbulenz der aussertropischen Zirkulation. In folgender Tabeller 6 sind bei verschiedenen Werten des Austausches die Prozentanteile der subtropischen Temperaturstörung angegeben, die gegen die höheren Breiten hin sich ausdehnend, schliesslich im neuen Gleichgewichtszustand erhalten bleiben.

Tabelle 6.

Prozente der Temperaturstörung in 30° Breite bei verschiedenen Werten von A .

A	$\sqrt{\frac{\rho \lambda}{A}}$	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$5 \cdot 10^7$	$0.663 \cdot 10^{-8}$	100	48	23	11	5.3	2.5	1.2
10^8	$0.448 \cdot 10^{-8}$	100	61	37	23	14	8.4	5.1
$5 \cdot 10^8$	$0.200 \cdot 10^{-8}$	100	80	63	51	41	33	26

Bei einem mittleren Austausch von $10^{-8} \text{ cm}^{-1} \text{ g sec}^{-1}$ würde z. B. in 40° Breite im neuen stationären Zustand blos 61 Prozent der Temperaturstörung in 30° Breite zu finden sein, in 60° Breite blos 23 Prozent, am Pol nur mehr 5 Prozent.

Äquatoriale Temperaturstörungen können sich also bei konstantem Austausch nur teilweise über die ganze Erdoberfläche ausbreiten; ihr Einfluss beschränkt sich vor allem auf die mittleren Breiten; er nimmt mit zunehmender Breite rasch ab. Die

¹ Für die Erbringung dieses Nachweises ist zu beachten, dass $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{q^2}{\alpha^2} - \alpha^2} d\alpha = e^{-2q}$ ist; siehe H. Weber: Partielle Differentialgleichungen § 13, S. 28.

Tabelle lehrt, dass diese Abnahme wesentlich von der Grösse des Austausches abhängt; denn der Pol erhält von einer subtropischen Temperaturstörung schliesslich bei $A = 5 \cdot 10^7$, 10^8 und $5 \cdot 10^8$ die Beträge 1, 5 und 26 Prozent, bei 10-fach grösserem Austausch also 26 mal mehr.

Die Beziehung 5 gibt uns keinen Aufschluss über die Geschwindigkeit, mit welcher die Ausbreitung der subtropischen Temperaturstörung erfolgt und über die Zeit, die praktisch zur Erreichung des neuen Gleichgewichtszustandes benötigt wird. Wir müssen zu diesem Zwecke auf die Gleichung 4 zurückgehen. Das Zeitglied steckt im Klammerausdruck der rechten Seite; dieser gibt an, welcher Betrag vom schliesslichen Endwert im neuen Gleichgewichtszustande zur Zeit t die Breite z bereits erreicht hat. Die Auswertung bietet einige Schwierigkeiten, da das Integral auf graphischem Wege berechnet werden muss. Diese Berechnung wurde bei $A = 10^8$ nur für den Pol ausgeführt, da, wie wir sehen werden, dies zur Orientierung völlig genügt. Das Ergebnis der langwierigen Zahlenrechnung ist folgendes:

Von der ganzen Temperatursteigerung, die am Pol nach Eintritt des *neuen* Gleichgewichtszustandes überhaupt zu konstatieren ist, sind

nach	8.9	Tagen	schon	63.5	Prozent	davon	erfolgt
„	12.8	„	„	82.4	Prozent		
„	20.2	„	„	96	Prozent		
„	35.7	„	„	bereits	100	Prozent.	

Praktisch tritt also am Pol der neue Gleichgewichtszustand bereits nach etwa 40 Tagen ein, in niederen Breiten natürlich wesentlich früher und zwar um so rascher, je näher die Breite dem Ursprungsort der Störung ist. Der Eintritt des neuen Zustandes erfolgt also, da bekanntlich die Ausgleichszeit der ungeordneten Bewegung etwa 1 Monat beträgt und diese Zeit bei der Auffassung der ausser-tropischen Zirkulation als Turbulenzerscheinung ungefähr als Zeiteinheit gilt, überaus rasch. *Die subtropische Temperaturstörung breitet sich infolge der grossen Turbulenz der ausser-tropischen Zirkulation mit abnehmender Stärke und mit grosser Geschwindigkeit meridional über die ganze Erde aus.* Temperaturstörungen in den Subtropen und Tropen können sich also mit einer Verspätung von höchstens einem Monat in den Temperaturmessungen der mittleren und höheren Breiten zeigen, aber ihre Intensitäten sind kleiner als in den niederen Breiten und verschwinden nahezu am Pol.

Mehr Interesse als die Frage nach der Ausbreitung einer plötzlichen, subtropischen Temperaturstörung über die ganze Erde bei konstantem Austausch bietet die Frage nach der Ausbreitung periodischer Temperaturschwankungen in der äquatorialen Zone der Erde gegen die mittleren und höheren Breiten hin.

Die Lösung dieses Problems gelang nicht nur für die Ebene sondern auch für die gekrümmte Erdoberfläche. Es ist vielleicht von Wert beide Lösungen nacheinander mitzuteilen.

Periodische Temperaturänderungen in den Subtropen. Lösung für die Ebene. Wir gehen wieder von der Gleichung 1 aus, setzen in ihr $\frac{A}{\rho} = a^2$ und nehmen eine Lösung derselben in der Form $s = s_1 + e^{imt + a z}$ an. Zwischen a und m besteht dann die Beziehung

$$a = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{a^2} + \frac{m}{a^2} i} = \pm (\xi + \eta i)$$

6.)

$$\text{worin } \xi = \sqrt{\frac{\lambda}{2 a^2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{m^2}{\lambda^2}}} \quad \text{und} \quad \eta = \sqrt{\frac{\lambda}{2 a^2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{m^2}{\lambda^2}}}$$

ist. Die Lösung nimmt dann die Form

$$s = s_1 + C e^{-\xi z} e^{i(mt - \eta z)}$$

an, worin C eine beliebige Konstante bedeutet. Der reelle Teil dieser Lösung ist:

$$7.) \quad s = s_1 + C e^{-\xi z} \cos(mt - \eta z).$$

In 30° Breite, wo $z = 0$ ist, wird $s = s_1 + C \cos mt$. Der stationären Temperatur s_1 ist eine Temperaturwelle mit der Amplitude C und der Periode $T = \frac{2\pi}{m}$ überlagert.

Diese subtropische Temperatururschwankung pflanzt sich nun nach Gleichung 7 gegen die höheren Breiten hin aus. *Über der stationären, meridionalen Temperaturverteilung s_1 wandert eine Temperaturwelle nach Norden mit abnehmender Amplitude und mit verzögerter Phase.* Die Abnahme der Amplitude und die Verzögerung der Phase hängen wieder vom Verhältnis $A : \lambda$ ab, also wesentlich von der Grösse des Austausches, von der Stärke der Turbulenz der Zirkulation. Das Maximum der Temperatur findet in der Breite z zur Zeit $t = \frac{z \eta}{m} + 2n\pi$ statt, worin n eine ganze Zahl bedeutet. Die Maxima pflanzen sich gegen die höheren Breiten mit der Geschwindigkeit $\frac{m}{\eta}$ fort und verlieren hierbei an Höhe. Es ist

$$\frac{m}{\eta} = \sqrt{2 a^2 \lambda \left[\sqrt{1 + \frac{m^2}{\lambda^2}} - 1 \right]}.$$

Die Lösung des Problems ergibt also folgenden Satz: *Findet in der äquatorialen Zone eine periodische Temperaturschwankung statt, so breitet sich diese infolge der ungeordneten Bewegung der aussertropischen Zirkulation mit abnehmender Amplitude und verzögerter Phase meridional über die ganze Erde aus.*

Wir wollen ein Beispiel rechnen. Es ist bekannt, dass die Temperatur der Tropen- und Subtropenzone der Zahl der Sonnenflecken in einer regelmässigen Schwankung folgt. Diese 11-jährige Temperaturschwankung der äquatorialen Zone muss nach unseren Darlegungen zufolge der ungeordneten Bewegung der Atmosphäre aussertropischer Breiten auch eine 11-jährige Temperaturschwankung in mittleren und höheren Breiten der Erde hervorrufen, doch entsprechend unserer Lösung, mit verminderter Amplitude und verzögerter Phase. Diese Abnahme und diese Verzögerung wollen wir theoretisch berechnen.

Im vorliegenden Falle ist $m = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{11 \text{ Jahre}} = 1.81 \cdot 10^{-8} \text{ sec}$, $\lambda = 2.10^{-6}$, $A = 10^8$, also $a^2 = 10^{11}$. Es wird $\xi = 0.448 \cdot 10^{-8}$ und $\eta = 2.02 \cdot 10^{-11}$. Daraus folgt als Geschwindigkeit der Fortpflanzung der Extreme gegen den Pol $m : \eta = 9.10^2 \text{ cm/sec} = 9 \text{ m/sec}$. Für einen Breitengrad benötigt die Welle 3.34 Stunden oder 0.14 Tage. Die Verspätung der Extreme für die verschiedenen Breiten steht in folgender Übersicht:

in der Breite	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Verspätung in Tagen:	0	1.4	2.8	4.2	5.6	7.0	8.4.

Die Abnahme der Amplitude ist durch die e -Potenz $e^{-\xi s}$ gegeben; für verschiedene Werte von A ergibt sich folgende prozentuelle Abnahme der Amplitude mit zunehmender Breite:

Breite	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$A = 5 \cdot 10^7$	100	48.0	23.0	11.0	5.3	2.5	1.2
$A = 10^8$	100	60.9	37.1	22.6	13.8	8.4	5.1
$A = 5 \cdot 10^8$	100	80.3	63.2	51.4	41.2	32.9	26.4.

Die Theorie ergibt das Resultat, dass die elfjährige Temperaturschwankung der Tropen und Subtropen in den höheren Breiten der Erde mit einer ganz unbedeutenden Phasenverzögerung, die wir unbedenklich vernachlässigen können, jedoch mit wesentlich kleinerer Amplitude auftritt; da wir für die Erde im Durchschnitte $A = 3 \cdot 10^8$ gefunden haben, beträgt die Amplitudenabnahme auf der Erde in etwa 50° Breite 50 Prozent, in 70° Breite rund 80 %.

DIE ZIRKULATION DER ATMOSPHÄRE

W. Köppen¹ hat für verschiedene Erdteile den Temperaturgang in der 11-jährigen Sonnenfleckenperiode ermittelt und graphisch dargestellt. Aus den Zahlenwerten und aus der Figur entnimmt man die Tatsachen, dass erstens von einer gesetzmässigen Phasenverzögerung mit zunehmender Breite nichts zu konstatieren ist; wenigstens ist sie so gering, dass sie gegenüber der Länge der Periode völlig zurücktritt; zweitens dass die Amplitude der Schwankung mit der Breite gewiss abnimmt. In den Tropen ist die Schwankung kräftig und regelmässig; der Abstand der Extreme ist im allgemeinen Durchschnitte etwa 0.5° C; in den gemässigten Breiten der nördlichen Zone (etwa 40 bis 60° N Breite) ist die Schwankung im allgemeinen Mittel regelmässig und ohne Phasenverzögerung gegenüber der äquatorialen, jedoch geringerer Amplitude; der Abstand der Extreme ist etwa 0.3° C, gegenüber den Tropenwert bloß 60 Prozent.

Aus der qualitativen und quantitativen Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung können wir schliessen, dass *sich die elfjährige, den Schwankungen der Sonnenfleckenzahlen folgende Temperaturschwankung auf der Erde von den Tropen aus, wo sie kräftig und regelmässig auftritt, durch die Turbulenz der aussertropischen Zirkulation über die ganze Erde ohne wesentliche Phasenverzögerung und mit gegen die Pole hin abnehmender Ampitude ausbreitet.*

Dafür spricht schon die Tatsache, dass in den höheren Breiten der Erde nur für grössere Gebiete der Erdoberfläche die Periode regelmässig hervortritt, während diese Regelmässigkeit für kleinere Gebiete und für kürzere Zeiträume der Beobachtung verschwindet. Dies deutet darauf hin, dass gerade auf dem Wege des ungeordneten Massenaustausches, der nur für grosse Gebiete und grosse Zeiten einigermaßen regelmässige Erscheinungen liefert, der Wärmetransport, der diese Temperaturschwankung hervorruft, erfolgt, während der direkte Einfluss der Sonne durch die Sonnenflecken, wenn er schon so klein in den Tropen ist, in den höheren Breiten der Erde völlig zurücktritt. So wird der 11-jährige, den Sonnenflecken folgende Zyklus der Temperatur zu einem ausgezeichneten Beispiel für die hier entwickelte Theorie von Klimaschwankungen bei konstantem Austausch.

Wir fanden, dass für eine Periode von 11 Jahren die Phasenverzögerung verschwindend klein ist; vielleicht ist aber diese Verzögerung für Schwankungen kleinerer Periode grösser und dann zu berücksichtigen. Wir können uns nun die Frage vorlegen: Wann gibt in der Fortpflanzung der Wellen gegen Norden, die durch den Bruch $\frac{m}{\eta}$ gegeben ist, die Schwingungszahl m etwas aus? wie gross muss die Periode $T = \frac{2\pi}{m}$ gewählt werden, damit die Verzögerung von 30° Breite

¹ W. Köppen: Lufttemperaturen, Sonnenflecken, Vulkanausbrüche, Meteor. Zeitschr. 1914, 31. S. 305. Die entsprechende Figur findet sich auch in A. Defant: Wetter u. Wettervorhersage auf Seite 279.

bis zum Pol, also für 60° gerade einen Monat beträgt? Denn von diesem Zeitraume ab, können wir der Verzögerung einige praktische Bedeutung beimessen.

Zur Zurücklegung von 60 Breitengraden werden $60 \frac{111 \cdot 10^5 \eta}{3600 m}$ Stunden benötigt; wenn diese Zeit einen Monat betragen soll, muss $\frac{m}{\eta} = 2 \cdot 56 \cdot 10^3$ sein. Daraus folgt $\frac{m^2}{\lambda^2} = 239$ und $m = \frac{2\pi}{T} = 3 \cdot 2 \cdot 10^{-5}$ oder $T = 30$ Stunden = 1.25 Tage.

Die Periode der Temperaturschwankung, bei der die Phasenverzögerung bei der Ausbreitung bis zum Pol einen Monat beträgt, ist demnach sehr klein. Wir können in allen Fällen von der kleinsten bis zu der grössten Periode praktisch die Grösse η gleich Null ansetzen, d. h. es gibt bei der bestehenden Grösse des Austausches keine Phasenverzögerung. *Die tropischen Temperaturstörungen breiten sich überaus rasch meridional über die ganze Erde aus; sie erscheinen jedoch in den höheren Breiten der Erde mit wesentlich kleineren Amplituden als in den äquatorialen Gebieten der Erde.*

Lösung für die Kugel. In diesem Falle gehen wir von der Gleichung 6 des früheren Abschnittes aus; sie lautet, wenn $\frac{A}{\rho R^2} = a^2$ ist

$$8.) \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{a^2}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial s}{\partial \vartheta} \right) - \lambda (s - s_0).$$

Wir setzen eine Lösung in der Form

$$9.) \quad s = s_1 + C e^{i m t} K_\mu (\cos \vartheta)$$

voraus, worin s_1 ein stationärer Wärmeszustand bedeutet, der die Gleichung 7 des vorhergehenden Abschnittes erfüllt, C eine Konstante und $K_\mu (\cos \vartheta)$ die erste Mehler'sche Kegelfunktion der Ordnung μ bedeutet. Setzen wir 9 in 8 ein, so erhält man für K_μ die Bedingungsgleichung

$$10.) \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial K_\mu}{\partial \vartheta} \right) - \frac{1}{a^2} (\lambda + m i) K_\mu = 0.$$

K_μ ist eine Kegelfunktion, welche die Gleichung 10 erfüllt, wenn

$$11.) \quad \frac{\lambda}{a^2} + \frac{m}{a^2} i = \mu^2 + \frac{1}{4}$$

ist. Daraus folgt μ . Gleichung 9 ist demnach eine vollständige Lösung der

Differentialgleichung 8, wenn μ die Bedingungsgleichung 11 erfüllt. Wir stellen die Lösung 9 in Form einer Reihe dar und zwar

12.)

$$s - s_1 = C e^{imt} \left[1 + \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) \sin^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right) + \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{4} \left(\mu^2 + \frac{9}{4} \right) \sin^4 \left(\frac{\vartheta}{2} \right) + \right. \\ \left. + \left(\mu^2 + \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{4} \left(\mu^2 + \frac{9}{4} \right) \cdot \frac{1}{9} \left(\mu^2 + \frac{25}{4} \right) \sin^6 \left(\frac{\vartheta}{2} \right) + \dots \right],$$

μ^2 ist durch Gleichung 11 eine komplexe Grösse, $e^{imt} = \cos mt + i \sin mt$ ist ebenfalls komplex. Wir multiplizieren aus und behalten bloss die reellen Glieder, so ergeben sich als reelle Koeffizienten der Glieder $\sin^n \left(\frac{\vartheta}{2} \right)$ folgende:

1. *Glied:* $C \cos mt$.

2. *Glied:* $C \left(\cos mt + i \sin mt \right) \left(\frac{\lambda}{a^2} + \frac{m}{a^2} i \right)$, davon reell

$$C \left[\frac{\lambda}{a^2} \cos mt - \frac{m}{a^2} \sin mt \right] = C p_2 \cos (mt + \beta_2), \text{ wenn}$$

$$\frac{\lambda}{a^2} = p_2 \cos \beta_2 \text{ und } \frac{m}{a^2} = p_2 \sin \beta_2 \text{ ist.}$$

3. *Glied:* $\frac{1}{4} C \left[\cos mt + i \sin mt \right] \left(\frac{\lambda}{a^2} + \frac{m}{a^2} i \right) \left(\frac{\lambda}{a^2} + \frac{m}{a^2} i + 2 \right)$, davon reell

$$\frac{C}{4} \left[\left(\frac{\lambda^2 - m^2}{a^4} + \frac{2\lambda}{a^2} \right) \cos mt - \left(\frac{2\lambda m}{a^4} + \frac{2m}{a^2} \right) \sin mt \right] =$$

$$= C p_4 \cos (mt + \beta_4), \text{ wenn}$$

$$\frac{\lambda^2 - m^2}{a^4} + \frac{2\lambda}{a^2} = 4 p_4 \cos \beta_4 \text{ und } \frac{2\lambda m}{a^4} + \frac{2m}{a^2} = 4 p_4 \sin \beta_4,$$

usw.

Jedem Koeffizienten kann die Form $C p_n \cos (mt + \beta_n)$ gegeben werden, derart dass die Lösung der Differentialgleichung 8 in reeller Form erscheint als

13.)

$$s = s_1 + C \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} \cos (mt + \beta_{2n}) \sin^{2n} \left(\frac{\vartheta}{2} \right).$$

Sie stellt eine Reihe von Wellen dar, von denen jede von niederen Breiten ausgehend mit einer Amplitudenabnahme und einer Phasenverzögerung gegen die

höheren Breiten hin sich fortpflanzt. Die Form der Lösung 13 ist dieselbe wie für die Ebene, jedoch ist das Gesetz der Amplitudenabnahme und der Phasenverzögerung bei Ausbreitung gegen die höheren Breiten hin jetzt ein wesentlich komplizierteres. Die am Pol sich einstellende Temperaturwelle, die der stationären meridionalen Temperaturverteilung überlagert ist, hat hier die einfache Form $C \cos mt$. Je mehr wir gegen den Äquator gehen, desto mehr geben die Potenzen von $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ aus, die eine Zunahme der Amplitude und eine Verfrüherung der Phase bedeuten.

Auch auf der gekrümmten Erdoberfläche bedingt die ungeordnete Bewegung der aussertropischen Zirkulation die Ausbreitung einer äquatorialen, periodischen Temperaturschwankung meridional über die ganze Erde und auch hier zeigen die höheren Breiten die Temperaturwelle mit derselben Periode, jedoch mit verminderter Amplitude und verzögerter Phase.

Es besteht natürlich auch in diesem Falle keine Schwierigkeiten an einem bestimmten Beispiel zahlenmässig die ganze Erscheinung durchzurechnen. Wir wählen wieder eine Temperaturschwankung 11-jähriger Periode, um das Resultat mit dem früheren zu vergleichen.

$$A = 10^8, \quad \lambda = 2.10^{-6}, \quad a^2 = 2.5.10^{-7}, \quad \frac{\lambda}{a^2} = 8, \quad \frac{m}{a^2} = 7.24.10^{-2} \quad m = 1.81.10^{-8} \text{ sec}^{-1}.$$

Die Zusammenfassung aller Glieder bis inklusive $\sin^{12}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ergab:

$$\text{für } 30^\circ \text{ Breite die Welle } s - s_1 = 4.92 C \cos(mt + 0^\circ 42'),$$

$$\text{für den Pol } s - s_1 = C \cos mt.$$

Die Amplitude am Pol beträgt demnach bloss 20.4 Prozent von jener in 30° Breite; die Abnahme ist nahezu 80 Prozent des ursprünglichen Wertes. Hingegen ist die Phasenverzögerung sehr gering; in Tagen ausgedrückt beträgt sie bloss 7.8 Tage. Ein Unterschied gegenüber der Ebene besteht nur darin, dass bei gleichem Austausch bei einer gekrümmten Erdoberfläche die Schwächung der Amplitude etwas geringer ist als bei der Ebene. Die Temperaturwelle breitet sich hier weiter aus, die Phasenverzögerung ist aber in beiden Fällen zu vernachlässigen. Die Schlüsse, die wir im Falle der Ebene gezogen haben und der Vergleich mit der 11-jährigen Sonnenfleckenperiode der Temperatur können wir ohne weiteres auch auf die gekrümmte Erdoberfläche übertragen.

Störungen der meteorologischen Elemente in äquatorialen Gegenden können nach den bisherigen Überlegungen allein zufolge der ungeordneten Bewegung der Luftmassen in der aussertropischen Zirkulation zu Schwankungen der meteorologischen Elemente in den mittleren und höheren Breiten der Erde Veranlassung geben. Diese Klimaschwankungen befolgen aber das Gesetz, dass ihre Intensität

mit zunehmender Breite abnimmt und gegenüber den erzeugenden Störungen in den Tropen und Subtropen keine wesentliche Verzögerung in ihrer Eintrittszeit vorhanden ist. Die Störungen breiten sich in relativ kurzer Zeit meridional über die ganze Erde aus. In einer solchen Art von Störungen scheint der 11-jährige Sonnenfleckenzyklus der Temperatur der Erde zu gehören, der in den Tropen direkt durch Schwankungen der Sonnenstrahlung erzeugt, durch die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre sich über die ganze Erde ohne wesentliche Phasenverspätung, jedoch mit verminderter Amplitude ausbreitet. Ob es noch andere solche Schwankungen meteorologischer Elemente gibt, ist nicht bekannt; es ist aber sehr wahrscheinlich, dass äquatoriale Störungen des normalen Verlaufes der meteorologischen Elemente sich auf diese Art der Lufthülle der ganzen Erde mitteilen und eine der wichtigeren Arten von kurz- oder langdauernden Klimaschwankungen bilden.

7. Klimaschwankungen bei veränderlichem Austausch.

Bei der bisher besprochenen Art von Temperaturstörungen wurde die Turbulenzstärke der aussertropischen Zirkulation als konstant vorausgesetzt. Die dabei auftretenden Störungen breiten sich meridional über die ganze Erdoberfläche aus und haben die grösste Intensität am Ursprungsorte selbst. Die Abnahme der Intensität mit zunehmender Breite war für die Verhältnisse auf unserer Erde gross, hingegen war die zu erwartende Phasenverzögerung bei dem grossen Werte des Austausches gänzlich zu vernachlässigen. Bei diesen Klimaschwankungen müssten demnach die grössten Störungen in den Tropen und Subtropen auftreten, in den mittleren Breiten wären sie an Intensität schon geringer, in den höheren Breiten würden sie bereits unmerklich werden.

Die auf der Erde zumeist konstatierten Schwankungen der meteorologischen Elemente weisen ihre grösste Intensität in den meisten Fällen in den mittleren und höheren Breiten der Erde auf. Genau wie die Grösse der interdiurnen Veränderlichkeit des Luftdruckes in den höheren Breiten am grössten ist und von hier aus gegen Süden rasch abnimmt, so scheinen auch die Klimaschwankungen grossen Stils in den höheren Breiten wesentlich stärker aufzutreten, als in den niederen Breiten. Bei zeitlich konstantem Austausch der ungeordneten Zirkulation der aussertropischen Breiten kann diese Art von Klimaschwankungen nicht erklärt werden. Doch ist auch die Annahme eines konstanten Austausches bei ihnen in keiner Weise zu rechtfertigen; sie scheinen hingegen in stärkeren Veränderungen der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre ihre Erklärung zu finden, bei denen gerade die Austauschgrösse A ihre grössten Schwankungen aufweisen wird.

In der Tat sehen wir, dass bei Schwankungen der Grösse A die grössten Schwankungen der Temperatur in mittleren und höheren Breiten auftreten müssen, in den Subtropen aber die Änderungen gleichzeitig gering sind. Tabelle 2 auf Seite 30 zeigt die meridionale Temperaturverteilung bei verschiedener Grösse des Austausches. Ändert sich der Austausch von $5 \cdot 10^7$ auf 10^8 bzw. $5 \cdot 10^8$, so sind nach erfolgter Einstellung auf den neuen Gleichgewichtszustand die meridionalen Temperaturänderungen folgende:

Meridionale Temperaturänderungen bei veränderlichem Austausch.

Breite	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
A ändert sich von $5 \cdot 10^7$ auf 10^8	0,0	+ 1,1	+ 2,0	+ 3,1	+ 4,2	+ 5,1	+ 5,5
A „ „ „ $5 \cdot 10^7$ auf $5 \cdot 10^8$	0,0	+ 5,6	+ 10,3	+ 15,2	+ 15,1	+ 22,6	+ 24,0

Die Schwankungen der Temperatur nehmen also mit der Breite zu; die durch Veränderungen des Austausches der aussertropischen Zirkulation bedingten Temperaturänderungen sind am grössten in den mittleren und höheren Breiten der Erde. Wir sehen gleichzeitig, dass geringe Schwankungen der Zirkulation ganz ausserordentliche Änderungen in der meridionalen Temperaturverteilung hervorrufen können; diese können gewiss die Grundlage bedeutender Klimaschwankungen abgeben. *Die in den vorhergehenden Abschnitten dargelegte Auffassung der atmosphärischen Zirkulation aussertropischer Breiten als turbulente Strömung grossen Stils gibt bei der Annahme eines mit der Zeit veränderlichen Austausches der ungeordneten Bewegung ohne weiteres die Grundlage zu einer Theorie der Klimaschwankungen.* Diese Theorie geht ebenfalls aus von der Grundgleichung 6 des Abschnittes 5 auf Seite 31, in der aber jetzt sowohl die Grösse A als auch λ und eventuell auch s_0 von der Zeit abhängig sind. Wir wollen diese Grundgleichung hier wieder niederschreiben:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\rho R^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[A \cos \varphi \frac{\partial s}{\partial \varphi} \right] - \lambda (s - s_0).$$

Klimaschwankungen der allgemeinsten Art können durch drei Faktoren hervorgerufen werden:

1. *Durch Änderungen in der Intensität der Sonnenstrahlung.* Durch diese Änderungen werden Änderungen in der Verteilung der Strahlungstemperaturen s_0 auf der Erdoberfläche bestimmt. Der Einfluss der direkten Sonnenstrahlung steckt in der Grösse s_0 , die also im eigentlichen Sinne den aussererrestrischen Anteil der Klimaschwankungen angibt.

2. *Durch Änderungen in den Ausstrahlungsverhältnissen der Atmosphäre.* Durch Änderungen in der Zusammensetzung der Atmosphäre, durch Änderungen ihres Staubgehaltes usw. können Änderungen in den optischen Eigenschaften der irdischen Lufthülle eintreten, die von Einfluss auf die Strahlungsverhältnisse der ganzen Atmosphäre sind. Es können Veränderungen vorkommen, welche eine raschere oder langsamere Annäherung der bestehenden Temperaturverhältnisse an das Strahlungsgleichgewicht bedingen. Diese Veränderungen stecken in dem Ausstrahlungskoeffizienten λ , der also in erster Linie die Strahlungsverhältnisse der Atmosphäre festlegt.

3. *Durch Änderungen in der Zirkulation der Atmosphäre.* Der grössere oder geringere Massenaustausch zwischen höheren und niederen Breiten hat nach den früheren Überlegungen gewiss einen grossen Einfluss auf die Temperaturverhältnisse der höheren Breiten. Die Schwankungen der aussertropischen Zirkulation spiegeln sich in den Veränderungen des Austausches A wieder, der also in erster Linie die dynamischen Verhältnisse der Zirkulation und ihrer Schwankungen charakterisiert.

In allgemeinem Durchschnitte können alle drei Faktoren: Sonnenstrahlung, Ausstrahlung und Zirkulation, als konstant angesehen werden; alle drei regeln die mittleren Temperaturverhältnisse der Lufthülle der Erde und damit die Klimaverhältnisse unseres Erdballs. Änderungen in ihnen geben aber Veranlassung zu Klimaschwankungen grösserer oder geringerer Intensität, je nachdem die Faktoren grösseren oder geringeren Schwankungen unterliegen. In der Jetztzeit sind diese gewiss klein und spielen im allgemeinen eine untergeordnete Rolle; nichts hindert uns aber anzunehmen, dass in früheren Zeiten die Schwankungen grösser waren; dann waren aber auch die Folgen bedeutender und obige Beziehung lehrt uns, dass dann diese Klimaschwankungen die ganze Erde umfassten und besonders in den höheren Breiten der Erde von bedeutenden Änderungen der meteorologischen Elemente begleitet waren. Die obige Gleichung vereinigt alle drei Faktoren zu einer Beziehung zu den zeitlichen Änderungen der meridionalen Temperaturverteilung; sie ist die allgemeinste Grundlage einer Theorie der Klimaschwankungen.

Es ist natürlich keine Rede davon, ein allgemeines Integral dieser Differentialgleichung bei mit der Zeit veränderlichen Koeffizienten A und λ zu finden; aber auch wenn wir für A und λ bestimmte einfach periodische Funktionen der Zeit einführen, war es nicht möglich eine allgemeine Lösung zu finden. Trotzdem gelingt es, manches für die Theorie der Klimaschwankungen wichtiges aus ihr zu entnehmen.

Die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre ist ohne Zweifel eine Wirkung des Temperaturgegensatzes zwischen Äquator und Pol. Einem bestimmten Temperaturunterschied zwischen niederen und höheren Breiten entspricht eine bestimmte

Stärke der Zirkulationsbewegung der Atmosphäre, ein bestimmter Wert der Ausgleichsgrösse A . Wird durch irgend eine Ursache der Temperaturgegensatz vergrössert, so wächst auch der Austausch; eine Zunahme dieser Grösse bedingt aber nach den früheren Überlegungen einen vermehrten Wärmetransport von den äquatorialen gegen die polaren Gebiete der Erde, eine Erwärmung der höheren Breiten. Die Vergrösserung des Austausches trachtet also wieder eine Verminderung des Temperaturgegensatzes zwischen Äquator und Pol hervorzurufen, womit aber Hand in Hand eine Verminderung der Zirkulationsstärke geht. *Die Zirkulation der Atmosphäre verhält sich für grössere Zeiträume, in denen der Austausch wirkt, wie ein Regulator.*

Eine aus dieser Tatsache sofort folgende Erscheinung ist, dass, wie allgemein feststeht, die Jahresmittel der meteorologischen Elemente weniger schwanken, als die Monatsmittel. Die Abhängigkeit der allgemeinen Zirkulation vom meridionalen Temperaturunterschied zusammen mit dem dadurch in der Zirkulation bedingten Wärmetransport gegen die höheren Breiten verhindert die Ausbildung zu langdauernder Abweichungen vom Durchschnittswert, sodass letztere blos den Charakter von Pulsationen annehmen. Änderungen der Turbulenz rufen Änderungen im meridionalen Temperaturgegensatz und diese wieder Änderungen in der Turbulenz der atmosphärischen Zirkulation hervor. Wenn keine Umstände vorhanden sind, welche gleichzeitig fortlaufende Änderungen der Turbulenz bedingen, würde die Zirkulation und der meridionale Temperaturgegensatz bald sich einem stationären Gleichgewichtszustand nähern und schliesslich in diesem verharren.

Bei dieser Betrachtung wurde der Ausstrahlungskoeffizient λ als konstant angesehen. Wir wissen heutzutage, dass auch diese Annahme nur eine erste Annäherung an die Wirklichkeit bedeuten kann, dass die Ausstrahlungsverhältnisse der Atmosphäre infolge des Wechsels der Konstitution derselben (z. B. infolge von Vulkanausbrüchen usw.) Änderungen unterworfen sein können. Dadurch werden aber die Verhältnisse noch verworrener. Trotzdem können wir auf Grund unserer Betrachtungen eine in sich geschlossene Folge von Änderungen aufstellen, die das Bild einer Klimaschwankung ergeben, wie es die Beobachtungen uns gezeigt haben. Die hierbei als veränderlich angesehenen Grössen sind jetzt A , λ und s .

Wir nehmen zunächst an, dass auf der Erdoberfläche normale Verhältnisse vorhanden sind, denen ein normales A , ein normales λ , vor allem ein normaler Wert des Verhältnisses $A:\lambda$ und eine in *Figur 4* schematisch durch eine Gerade dargestellte, meridionale Temperaturverteilung II entspricht.

1. Durch irgend welche Ursache trete nun eine Vergrösserung von λ ein. Die unteren Luftschichten der Atmosphäre würden sich dann rascher abkühlen können als früher. Das Verhältnis $A:\lambda$ wird kleiner als normal und dies be-

dingt, wenn die Vergrößerung von λ längere Zeit anhält, eine Vergrößerung des Temperaturgegensatzes zwischen Äquator und Pol; aus der meridionalen Temperaturverteilung II wird schematisch eine Temperaturverteilung III.

Dadurch tritt aber wieder eine Änderung in der Zirkulationsstärke ein. Die Vergrößerung des meridionalen Temperaturgegensatzes bedingt eine Verstärkung der Zirkulation, eine Vergrößerung des Austausches A . Dadurch kehrt aber gleichzeitig die Temperaturverteilung III auf II zurück. Zum Schlusse ist das Verhältnis $A:\lambda$ wieder normal, jedoch sowohl A als auch λ sind grösser als früher. Das Temperaturgefälle ist aber jenem vor der Störung gleich.

Dieser ganze Prozess bietet das Bild einer vorübergehenden Kälteanomalie der mittleren und höheren Breiten.

2. Lassen nun jene Umstände, welche eine Vergrößerung der Grösse λ hervorgerufen haben, allmählich nach, geht also λ auf den früheren, normalen Wert zurück, dann wird das Verhältnis $A:\lambda$ nun zu gross; dies bedeutet eine Vermehrung des Wärmetransportes gegen die Pole hin. Aus der meridionalen Temperaturverteilung II wird schematisch eine solche I. Der Schwächung des Temperaturunterschiedes folgt aber eine Schwächung der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre, ein Zurückgehen des Austauschwertes A . Dadurch kehrt aber I wieder auf II zurück, bis das Verhältnis $A:\lambda$ wieder normal und man am Ausgangspunkt wieder zurückgekehrt ist.

Der Kälteanomalie des ersten Stadiums folgt ein zweites Stadium, eine Wärmeanomalie der mittleren und höheren Breiten und zum Schlusse kehren wieder normale Verhältnisse ein. Wir erhalten das Bild einer in sich geschlossenen Klimaschwankung, ursächlich hervorgerufen durch eine Änderung in den Ausstrahlungsverhältnissen der Atmosphäre, wie sie z. B. durch einen kräftigen Vulkanausbruch bedingt sind. Ein ganz ähnliches Bild liefert uns auch die Annahme, dass die Intensität der Sonnenstrahlung einer periodischen Änderung unterliegt; da ändern sich die Grössen s_0 statt λ ; die Folgerungen sind dieselben wie früher.

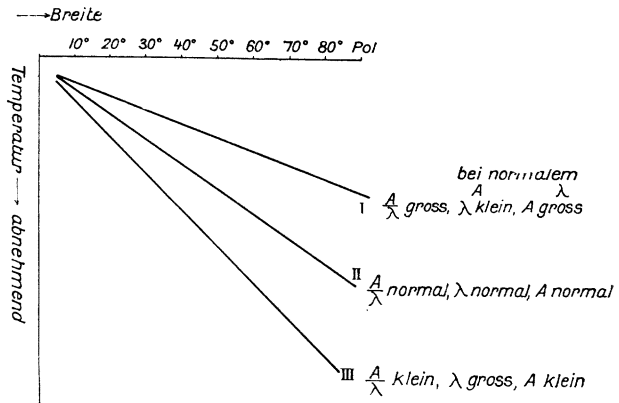


Fig. 4.

Über die Zeit, die den Ablauf einer solchen Klimaschwankung regelt, und über die Intensität der Schwankung können wir nichts aussagen; erstere kann kurz letztere klein sein, gemäss den kleinen Klimaschwankungen der historischen Zeit, oder beide gross gemäss den über viele Jahrtausende sich erstreckenden Klimaschwankungen, welche die Geologie in der Diluvialzeit aufgedeckt hat.

Brückners's grundlegende Untersuchungen¹ über die Klimaschwankungen haben auf Grund ausgedehnten Beobachtungsmaterials uns einen Einblick in den Mechanismus dieser Erscheinungen gegeben und uns gezeigt, wie die verschiedenen meteorologischen Elemente bei solchen Klimaschwankungen ineinandergreifen. Verborgnen blieb bloss die gewaltige Kraft, welche diese Änderungen hervorruft, die primäre Ursache der Klimaschwankungen. Die vorstehenden Untersuchungen lehren uns, wie drei der wichtigsten Faktoren: *Sonnenstrahlung, Ausstrahlung und Zirkulation der Atmosphäre* am Zustandekommen von zeitlichen Änderungen der meteorologischen Elemente beteiligt sind; Schwankungen des einen Faktors können allein schon die Ursache von Klimaschwankungen sein, welche infolge der ausser-tropischen, turbulenten Zirkulation die mittleren und höheren Breiten der ganzen Erde umfassen und besonders in letzteren zu grösserer Stärke anwachsen können. Die Rolle, die der ungeordneten Bewegung der Luftmassen in der aussertropischen Zirkulation bei den Klimaschwankungen hauptsächlich zukommt, ist die eines Regulators der meridionalen Temperaturverteilung. Sie verhindert einerseits zu grosse Gegensätze, andererseits gibt sie aber die Veranlassung zu lang- oder kurzperiodischen Schwankungen und ist zugleich die Ursache ihrer Ausbreitung über die ganze Erde.

Wir erkennen nun, wie die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre in das Räderwerk einer Klimaschwankung eingreift. Diese Einsicht verdanken wir in erster Linie der Auffassung der aussertropischen Zirkulation als turbulente Strömung grossen Stils. Sie hat uns gezeigt, welche Wärmemengen infolge des ungeordneten Massentransportes von niederen gegen höhere Breiten verschoben werden, wie diese benötigt werden die mittlere meridionale Temperaturverteilung der unteren Luftschichten auf jene Höhe zu erhalten, die wir beobachten, sie hat den Weg angegeben, auf welchem sich Temperaturstörungen von den äquatorialen Gebieten der Erde meridional über die ganze Erde ausbreiten, sie hat auch die Gesetze dieser Ausbreitung aufzufinden gestattet und zum Schlusse noch einen Einblick gewährt in das Ineinandergreifen der wichtigsten Faktoren, die einer Klimaschwankung zugrunde liegen.

Alle diese Resultate führen zur Überzeugung, dass die Auffassung der aussertropischen Zirkulation als turbulente Strömung grossen Stils von Westen nach Osten rund um die Erde, in den Tatsachen eine gute Stütze findet und zur

¹ E. Brückner: Klimaschwankungen seit 1700. Pencks Geograph. Abhandlungen IV. B. Heft 2. 1890.

Erklärung einer Reihe von wichtigen Erscheinungen führt, die mit der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre zusammenhängen, gerade deshalb aber ihrer näheren Behandlung manche Schwierigkeiten bieten. Bei den vorstehenden Überlegungen sind einzelne, weitgehende vereinfachende Voraussetzungen notwendig gewesen, unter denen die, dass wir es statt mit der wirklichen Erde mit einem idealen, unter allen Längengraden gleich beschaffenen Weltkörper zu tun haben, die wichtigste ist. In wie weit die Land- und Meerverteilung den meridionalen Massenaustausch stört oder in andere Bahnen lenkt, wurde hier nicht untersucht; dies bietet genügenden Stoff zu weiteren Untersuchungen über die Turbulenz der aussertropischen Zirkulation und ihrer Wirkungen. In der ersten Untersuchung über diesen Gegenstand war es gewiss berechtigt, von diesen kleineren Erscheinungen abzu- sehen, um das grosse Ganze zunächst besser hervortreten zu lassen.

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

1. Die Zirkulation der Atmosphäre aussertropischer Breiten aufgefasst als Turbulenzerscheinung 209
 2. Der Massenaustausch zwischen niederen und höheren Breiten bei der aussertropischen Zirkulation der Atmosphäre 216
 3. Über die Stabilität der aussertropischen Zirkulation 223
 4. Die Folgen des Massenaustausches auf den Wärmehaushalt der Atmosphäre 227
 5. Die meridionale Temperaturverteilung in der Atmosphäre.... 232
 6. Klimaschwankungen bei konstantem Austausch 248
 7. Klimaschwankungen bei veränderlichem Austausch 259
-